

**Article Type:**

Research Paper

**Original Title of Article:**

Assessment of student achievement and views on the impact of instruction with visualization of identities in  $(ax+b)^n$  form in mathematics

**Turkish Title of Article:**

Matematikte  $(ax+b)^n$  biçimindeki özdeşliklerin görselleştirme kullanılarak yapılan öğretiminin öğrencilerin başarısına etkisi ve görüşlerinin değerlendirilmesi

**Author(s):**

Aziz İLHAN, Halil Coşkun ÇELİK

**For Cite in:**

İlhan, A. &Çelik, H. C. (2018). Assessment of student achievement and views on the impact of instruction with visualization of identities in  $(ax+b)^n$  form in mathematics. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 8(4), 833-878, <http://dx.doi.org/10.14527/pegegog.2018.031>

**Makale Türü:**

Özgün Makale

**Orijinal Makale Başlığı:**

Assessment of student achievement and views on the impact of instruction with visualization of identities in  $(ax+b)^n$  form in mathematics

**Makalenin Türkçe Başlığı:**

Matematikte  $(ax+b)^n$  biçimindeki özdeşliklerin görselleştirme kullanılarak yapılan öğretiminin öğrencilerin başarısına etkisi ve görüşlerinin değerlendirilmesi

**Yazar(lar):**

Aziz İLHAN, Halil Coşkun ÇELİK

**Kaynak Gösterimi İçin:**

İlhan, A. &Çelik, H. C. (2018). Assessment of student achievement and views on the impact of instruction with visualization of identities in  $(ax+b)^n$  form in mathematics. *Pegem Eğitim ve Öğretim Dergisi*, 8(4), 833-878, <http://dx.doi.org/10.14527/pegegog.2018.031>

## Assessment of student achievement and views on the impact of instruction with visualization of identities in $(ax+b)^n$ form in mathematics

Aziz İLHAN <sup>\*a</sup>, Halil Coşkun ÇELİK <sup>\*\*b</sup>

<sup>a</sup> Munzur University, Çemişgezek Vocational School, Tunceli/Turkey

<sup>b</sup> Siirt University, Education Faculty, Siirt/Turkey



### Article Info

DOI: 10.14527/pegegog.2018.031

#### Article History:

Received 11 October 2017  
Revised 19 March 2018  
Accepted 01 April 2018  
Online 14 June 2018

#### Keywords:

Identity,  
Geometry instruction,  
Visualization,  
Vocational college students.

#### Article Type:

Research paper

### Abstract

The aim of the present study is to examine the impact of instruction with visualization of identities in form in mathematics on students' achievement and opinions. The study employs an explanatory design, a mixed method, through which qualitative and quantitative data were collected and analysed. Quantitative data in the study were obtained using the Identities and Binomial Exponential Achievement Test to determine the effect of visualization-assisted instruction on students' academic achievement. Qualitative data, regarding the student views on the subject, were collected through a structured interview form. Participants of the study, 53 students, were selected by appropriate sampling method among the first-year university students. The t-test and one-way covariance analysis were used to analyse the quantitative data and the content analysis method was used for the qualitative data. The results obtained from quantitative data indicated that instruction of algebraic expressions through mathematical visualization increased student achievement in comparison to traditional instruction. On the other hand, the qualitative data indicated that visualization facilitated a positive development in instruction of algebraic expressions, rendered the teaching process to be more interesting and enjoyable and led the students to acquire conceptual learning skills instead of memorizing.

## Matematikte $(ax+b)^n$ biçimindeki özdeşliklerin görselleştirme kullanılarak yapılan öğretiminin öğrencilerin başarısına etkisi ve görüşlerinin değerlendirilmesi

### Makale Bilgisi

DOI: 10.14527/pegegog.2018.031

#### Makale Geçmişi:

Geliş 11 Ekim 2017  
Düzeltilme 19 Mart 2018  
Kabul 01 Nisan 2018  
Çevrimiçi 14 Haziran 2018

#### Anahtar Kelimeler:

Özdeşlik,  
Geometri öğretimi,  
Görselleştirme,  
Meslek yüksekokulu öğrencileri.

#### Makale Türü:

Özgün makale

### Öz

Bu çalışmanın amacı, matematikte biçimindeki özdeşliklerin görselleştirme kullanılarak yapılan öğretiminin öğrencilerin başarısına etkisini ve bu çerçevede öğrencilerin görüşlerini incelemektir. Araştırmada, nitel ve nicel verilerin birlikte toplanarak analiz edildiği karma desenlerden açıklayıcı desen kullanılmıştır. Araştırmada nicel veriler, görselleştirme yardımıyla yapılan öğretimin öğrencilerin akademik başarıları üzerindeki etkisini belirlemek için Özdeşlikler ve Binom Açılımı Başarı Testi kullanılarak elde edilmiştir. Nitel veriler ise ilgili konudaki öğrenci görüşlerini almak için uygulanan yapılandırılmış görüşme formuyla toplanmıştır. Araştırmanın katılımcıları birinci sınıf üniversite öğrencilerinden uygun örnekleme yöntemiyle seçilen 53 öğrencidir. Verilerin analizinde t-testi, tek yönlü kovaryans analizi yöntemi ve içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Nicel verilerden elde edilen sonuçlar matematikte görselleştirme yardımıyla cebirsel ifadelerin öğretiminin geleneksel öğretime göre öğrenci başarısını daha fazla arttırdığını göstermiştir. Öte yandan, çalışmanın nitel verileri neticesinde, görselleştirmenin cebirsel ifadelerin öğretim sürecini olumlu yönde geliştirdiği, öğretim sürecini daha ilgi çekici ve eğlenceli hale getirdiği ve öğrencileri ezberleme yerine kavramsal öğrenmeye yönlendirdiği sonucuna ulaşılmıştır.

\* Author: ailhan@munzur.edu.tr

\*\* Author: hcocuk.celik@gmail.com

Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0001-7049-5756>

Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0003-0056-5338>

## Introduction

Mathematics is a universal language based on symbols and figures. It involves processing (organizing, analysing, interpreting and sharing), generating and estimating data, information and knowledge, as well as solving problems, through using this language (Ministry of National Education [MNE], 2009). Mathematics is often regarded as a course away and detached from real life, and also considered as a lesson which students just want to get the required grades to pass exams but do not want to meet and learn again in the rest of their lives (Durmuş & Karakırık, 2006). It is quite difficult to concretize abstract mathematical concepts (unknowns, algebraic expressions, etc.) in the mind and be able to give meaning to these concepts (Konyalıoğlu, 2003). One of them is the concept of identity. Indeed, the concept of identity has been defined by the Turkish Language Association (TLA) as "an equality of which both sides are the same, or an equality that takes numerically equal values on its both sides regardless of the numerical values that are given in letters" (TLA, 2017).

In order for a mathematical concept to be fully learned, the individual must first fully understand and interpret the relevant concept in his/her mind. This can be achieved by bringing the individual's mental development to a certain level. It is difficult to concretize abstract mathematical concepts in the mind and give meanings to these concepts. The learning of abstract concepts in mathematics requires a high level of cognitive activities. The concretization of abstract concepts as much as possible can be used to address this difficulty (Konyalıoğlu, 2003). In this framework, there has been a considerable change in the thought of what mathematics is and how it should be taught. Mathematical information is divided into small skill particles and then given to students, in traditional understanding of mathematics education. Students are expected to repeat this information through exercises and homework. Each question has a single answer, which is found using a pre-defined response method. Thus, a student who answers the maximum number of questions in the shortest way with the fastest time would be the most successful student among others. So, students have to learn these fastest and shortest ways of answering exam questions from their teachers who know the best and right way for teaching these methods (Olkun, Yıldız, Sarı, Uçar & Turan, 2014, p. 1544). Koğ and Başer (2011) stated that planning a rich and conspicuous learning environment, in terms of course material and instruction with the aid of visual or auditory means, accelerated and facilitated the systematic information processing in students' minds and makes the process more enjoyable for them.

The importance of visualization through geometric representations in teaching of algebra, which is one of the basic learning areas of mathematics, cannot be denied. Algebra fundamentally aims to help students be aware of the meanings of symbolic and graphical representations, use them to find mathematical outcomes and associations, and express these results and associations with symbols and graphics. On the other hand, geometry fundamentally aims at recognizing the properties of geometric objects in plane and three dimensional spaces, finding relations between them, defining geometric location, explaining and expressing transformations, and proving geometric propositions (Baki, 2008, pp. 333). Visualization plays an important role, especially in the animation of mathematical concepts and in discovering concepts and revealing relationships between them. Analytical approach, on the other hand, rarely encourages students to create an image of educational activities in their minds, or even when the student is encouraged to do so, they may have difficulties to create a mental image with little visual support provided by teaching materials (Hamersma, 2002).

Students might be actively engaged in research concepts or objects (abstract or concrete) for making learning take place in their minds. Visualization aims to make students concretize more challenging mathematical concepts in their minds, and increases their level of interaction with these concepts. However, visualization is mostly created in the form of static media (such as drawings on paper or blackboard). This requires the relevant discovery and manipulation mostly to be performed in their minds, thus provides limited discovery opportunity and reduced epistemic benefits. Therefore, static visualization may be insufficient to involve students in discovery activities that assist positive learning experiences. Particularly at an early age, students' visualization and cognitive abilities are in the first stage of development, so they may face greater problems (Liang & Sedig, 2010).

Visualization is a completely positive factor in learning mathematics, but it is not an unpredictable outcome. Having an audible, well-planned visual model or commentary to illustrate mathematical concepts with examples can help students develop their rules and then may increase personal facilitation after instructional activity with such a model. Students will then have something they can apply to test their hunches, thus mathematics begins to carry a personal meaning (Hamersma, 2002). Although concretization of mathematical concepts does not seem possible for all subjects, but even trying to make them semi-concrete will provide students with facilities for learning and teaching concepts (Yenilmez & Şan, 2008). The most important advantage of visualization in mathematics is that it makes a very abstract concept less abstract or concrete. This process is especially important for students who try to understand abstract mathematical concepts (Taşova & Delice, 2011). Visualization, discovery of mathematical problems, and interpretation of mathematical concepts and relationships between them can be a powerful tool in mathematical education. Visualization allows reducing complexity while dealing with a large amount of information (Rösken & Rolka, 2006). Visualization improves individuals' abilities to think dimensionally. Student-centred, interrogative teaching and application of non-rote learning education on the basis of two or three-dimensional thinking increase the teaching quality of identities in secondary and high schools. The placement of the concepts of figure and dimension affects the child's thought world and cognitive development positively, thus enhances the child's ability to think in two or three dimensions. A child who develops his/her ability to think in two or three dimensions acquires the ability of information exchange and collective discussion consciousness by looking at events from different perspectives (Özdemir, Duru & Akgün, 2005). Visualization can be accomplished in three basic ways: Shapes or graphics, animations, and computer software programs. Shapes or graphics are the presentations of abstract or algebraic expressions with the help of geometric models. Animations are the dynamic representations of the geometric models of abstract or algebraic expressions as a motion or action. From these approaches; the shapes or graphics approach includes fixed shapes, the animations approach consists of moving shapes, and the computer software programs approach contains geometric (fixed and mobile) shapes and algebraic solutions (Konyalıoğlu, 2003).

The formation of basic algebraic concepts and development of algebraic thinking in students are closely related to algebra teaching which starts in primary education (Uyganör & Övez, 2012). However, Dede, Yalın and Argün (2002) conducted a study in the field of algebra teaching, and stated that students had difficulties in understanding symbols of algebraic expressions, expressing algebraically a problem and using algebraic methods. Moreover, Yenilmez and Avcu (2009), in a similar study, pointed out that students had problems in understanding the problems of "establishing equations and learning to how solve these equations" in the field of learning algebra. The lack of visualization applications in educational and training activities, which are performed using chalk and blackboard and traditional teaching methods, urgently needs to be handled particularly in algebra and geometry courses. In this context, the assumptions that students fell conceptual confusion in teaching activities in the field of algebra and geometry and have insufficient knowledge to associate geometric forms with algebraic expressions come into prominence, and thus it is thought that supporting mathematics lessons with geometric display-based activities will increase students' success levels. In this regard, it is necessary to examine the effects of the learning approach through teaching with geometric representations on mathematical success of students, and evaluate their views on this subject. In this respect, it becomes necessary to examine the effects of visualization assisted instruction on achievement in mathematics and to evaluate students' opinions on visualization assisted instruction. In addition, when considered that students are not very familiar with visualization assisted instruction or are not interested in course activities enriched with geometric visuals, the present research could contribute to the research area by answering questions regarding the meaning of geometric visuals, why they should be used in mathematics curriculum explaining several basic points about visualization assisted instruction.

### **Purpose of the Study**

The main aim of the present study is to examine the impact of instruction with visualization of identities in mathematics in the form of  $(ax+b)^n$  on students' achievement and receive students' opinions regarding this approach. The answers to the following two sub questions were sought in parallel with this main aim:

- Is there a significant difference between the achievement of the students in the experimental group, in which mathematics was instructed using visualization and in the control group, in which mathematics was instructed with the traditional method?
- What are the opinions of the students in the experimental group, about the instruction process, in which mathematics was instructed using visualization?

### **Method**

#### **Research Design**

In the present study, explanatory design in mixed method, was employed to collect and analyse both qualitative and quantitative data. The quantitative study was conducted using pre-test post-test paired semi-experimental design with control group and the qualitative part was conducted using content analysis. The quantitative data were supported by the qualitative opinions of the students that participated in the experimental group.

#### **Study Group**

The study group consisted of the first-year students who study in construction inspection and banking and insurance programs and take Mathematics II course during the spring semester of 2015-2016 academic year in Çemişgezek Vocational School affiliated to Munzur (Tunceli) University in Turkey. The reasons for the selection of these programs include the closeness of these students' placement scores to each other in the Transition to Higher Education Examination as well as the homogeneity of their classes in terms of gender and number of students. Mathematics II course is carried out as the continuation of Mathematics I course taught in the related vocational school in the first semester, and basic skills related to identities are given in the 1st semester. In addition, higher education placement exam placement scores of the students and the instruction in secondary school prove that students have the required level of readiness. Therefore, it was considered that the level of readiness of the students should be similar before starting to research, and the application process was carried out in Mathematics II course given in the 2nd Semester. This course contains the topics such as identities, factorization, binomial expansion, and Pascal triangle. This study, which is designed to examine the effect of two different teaching methods on students' successes, randomly assigned 24 students studying in the construction inspection program to the experimental group and 29 students studying in the banking and insurance program to the control group.

In the present study, which investigates the effect of visualization assisted instruction on academic achievement, 24 students from the building supervision program were assigned to the experimental group and 29 students from the banking and insurance program were assigned to the control group that applied the traditional instruction method. Assignment to experiment and control groups was completed randomly.

#### **Data Collection Process**

The instructor has conducted the teaching process through visualization method in the experimental group and traditional teaching method in the control group. The Identities and Binomial Expansion Achievement Test (IBEAT) (see Appendix 2) was applied to the students in both groups as pre-test and post-test to determine the effect of these two different teaching methods on their success levels. The

"Student Opinion Form (SOF)" was applied as a post-test only to the students in the experimental group to take their opinions on the teaching method. The relevant research topics were spread over four weeks (12 course hours) considering the class hours of the students in both experimental and the control groups so that they could follow the course curriculum and create learning outputs. Teaching activities in both groups were carried out by the same teaching staff. The lessons in the control group were processed in the same classroom using lecture notes and direct instruction technique. The topic of Identities and Binomial Expansion was explained to the students in the classroom environment under the scope of course plan and then the related questions were asked to the students. Methods such as discussion and question-answer were included in some parts of the teaching process and the activities were carried out and explained by the instructor. The activities in the experimental group were carried out in a course environment where the students were actively participating by using visual teaching techniques. In this method, the diagrams representing each power of the  $ax+b$  expression are shown on the board by the instructor via an inductive teaching system. In this teaching process, it is required firstly to ask students how to visualize each algebraic form with geometric representations and to make them find the relevant answers. Correct visuals of algebraic expressions are displayed on the board, and the relevant solutions are made in the direction of their answers. Thus, the effects of this method on the success levels of the participating students were tried to be determined. The applications for the visualization process of the algebraic expressions through using geometric representations are given in details at the end the present study (see Appendix 1).

#### **Data Collection Tools**

The IBEAT (see Appendix 2) and SOF (see Appendix 3) were used as data collection tools in the present study. The IBEAT was developed by the researchers to investigate the effect of two applied teaching methods on students' success levels. For this achievement test, 15 questions were prepared, each with 4 open-ended sub-questions, suitable for the subject of "Identities and Binomial Expansion". The prepared questions were given to three faculty members who were experts (having at least five years of experience) in the fields of mathematics education (two of them) and educational sciences (one of them). The experts were given test questions for a week-long review, and then the questions were rearranged in conceptual and contextual terms in accordance with their feedbacks. The final test, which was obtained as a result of the re-arrangement process, consisted of 10 open-ended questions. Problem sentences related to the second, third, fourth, fifth and  $n$ 'th power expansions of the  $ax + b$  expression were included in the test. After re-arrangement process, the highest and lowest scores that could be taken from the test were determined as 100 and 0, respectively.

On the other hand, the SOF is a form consisting of eight open-ended questions developed by the researchers through literature review to obtain qualitative data. The questions on the form were related to what students mostly liked and disliked and what the most difficult thing was for them in the process of teaching mathematics with visuals. Their positive/negative opinions on this subject, and how geometric visuals could be used in other situations. The researchers have created 10 open-ended questions for this opinion form and presented them to the experts who had already examined the IBEAT. After the experts' feedbacks, two of these questions were removed, considering that they were not technically suitable for the research content.

#### **Data Analysis**

The significance of the difference between the pre-test scores of the experimental and control groups was examined by independent samples t-test. Also, the dependent samples t-test was used to determine whether there was a significant difference between the pre-test and post-test scores of the experimental and control groups. The significance of the difference between the end-test scores of the experimental and control groups was examined using the one-way covariance analysis (ANCOVA), in which the pre-test scores of the groups were taken as covariance. The quantitative data collected in the study were analysed by using SPSS 21.0.

The qualitative data obtained through the SOFs were firstly tabulated, and then students' answers were examined. The general tendency of the students was determined and the results were presented directly by quoting using their answers. For quoting, students' opinions on each question were examined first, and the responses given most frequently were quoted individually. In addition, general trends on all responses have been described via content analyses, and the student names were coded as K1, K2, K3 and so on in the quotations.

## Findings

### Findings Regarding Identities and Binomial Expansion Achievements

Table 1 shows the pre-test and post-test descriptive statistical values in the IBEAT performances of the students in both experimental and control groups.

**Table 1.**  
*IBEAT Pre-test and Post-test Descriptive Statistics of the Experimental and Control Groups.*

Group	Test	$\bar{X}$	Std	t	df	p	F	p
Experimental (n=24)	Pre-test	7.63	.78	-14.75	23	.00	354.28	.00
	Post-test	69.21	2.35					
Control (n=29)	Pre-test	4.83	.43	-7.22	28	.00	3.33	
	Post-test	58.72	1.24					

As can be seen from Table 1, students in the experimental group had higher pre-test and post-test identities and binomial expansion achievement scores than the students in the control group. According to the results of the independent samples t-test, the difference between these two groups' pre-test performance was not significant:  $t(51) = 1.66, p = .10$ .

On the other hand, after the application, the students in both groups significantly increased their test scores. As a result of the dependent samples t-test, a statistically significant difference was found between the pre-test and the post-test mean scores of the students in the experimental group in which the geometric visualization teaching method was applied:  $t(23) = -14.75, p = .00$ . Similarly, there was a statistically significant difference between averages of the pre-test and the post-test achievement scores of the students in the control group, in which the traditional instruction method was applied:  $t(28) = -7.22, p = .00$ .

One-way covariance analysis (ANCOVA) was performed by taking the pre-test scores as covariance in order to determine whether there was a statistically significant difference between the post-test IBEAT mean scores of the students in the control group in which the traditional teaching method was applied and of the students in the experimental group in which the geometric visualization teaching method was applied. Accordingly, a statistically significant difference was found between the corrected success mean scores that the students, who were in the experimental and control groups:  $F_{(1,12)} = 3.33, p = .00$ . In other words, the post-test scores are related to the group variable. According to Bonferroni test results between the groups' corrected success mean scores, the experimental group has higher mean success score ( $M = 69.21$ ) than the control group ( $M = 58.72$ ).

### Findings Regarding Student Opinion Form

The data regarding the qualitative aspects of the study were analysed via content analysis method. Themes, codes and frequency distributions, which were obtained as the result of the analysis, regarding the visualization assisted instruction were presented in Table 2. Eight themes, including "Visualization and Achievement", "The Effect of Visualization on Emotions", "The Importance of Visualization",

"Difficulties Encountering Visualization", "Visualization and Sensation", "Visualization Skills", "Visualization and Learning Areas" and "Visualization and Daily Life Relationship" were formed in parallel with the students' views on visualization assisted instruction. The findings are presented below.

**Table 2.**

*Themes, Codes and Frequency Distributions Regarding the Students' Views on The Perception of Visualization.*

Themes	Codes	f	%
Visualization and Achievement	Visualization enhances persistence	10	41.60
	Visualization contributes to better comprehension on the subject	8	33.33
Effect of Visualization on Emotions	Visualization enhances tangibility	4	16.60
	Easier learning of the course	9	37.50
	More enjoyable course period	8	33.33
	Dullness eliminated from the course	4	16.60
Significance of Visualization	Increase in the interest against the course	3	12.50
	Visualization is important	12	50.00
	Visualization offers a new perspective	8	33.33
Challenges Encountered in Visualization	Visualization is unimportant	3	12.50
	Unknown values	13	54.10
Visualization and Sensations	Operation processing	7	29.10
	Transition from algebraic structure to visual structure	3	12.50
Visualization Skills	A sensation of surprise	10	41.60
	A sensation of happiness	10	41.60
	A sensation of fear	4	16.60
Visualization and Areas of Instruction	Practical skills	12	50.00
	Cognitive skills	10	41.60
	Psychomotor skills	2	8.33
Visualization and its Relationship with Daily Life	Algebra instruction	13	54.10
	Geometry instruction	8	33.33
	Data collection instruction	3	12.50
Visualization and its Relationship with Daily Life	Helps to establish relationships with daily life	20	83.33
	Has no connection with establishing relationships with daily life	2	8.33
	Data does not establish relationships with daily life	2	8.33

In the present study, the students were initially asked the question "What do you think are the benefit(s) of this course to be instructed by using geometric shapes in terms of your achievement?" and three codes for the "Visualization and Achievement" theme were determined from the responses to this question. Once student views were examined in terms of frequency distributions, it was determined that the most preferred codes, respectively, were "visualization enhances persistence" (f=10), "visualization contributes to better comprehension on the subject" (f=8), and "visualization enhances tangibility" (f=4). Several student views regarding this theme are as follows;

*"In applied courses it is useful because the course will be more permanent when taught by shapes." (K4)*

*"I believe that the use of geometric shapes facilitates the learning process. The presence of visuals helps us to acquire different perspectives. In other words, geometric forms are more permanent because they are out of classical instruction." (K1)*

*"Implementation of the instruction process with shapes rendered the knowledge more permanent in our minds." (K10)*

*"The processing of the course with the geometric shapes helped me better understand the identities."* (K21)

*"I think it contributed highly in my achievement. Because when the course was taught using visuals, my comprehension ability increased."* (K17)

In addition to the responses mentioned above, the response of a student stating, *"I believe it is useful in terms of enhancing my ability to substantiate"* (K23) could be considered as significant a finding that the use of visual models is an important issue.

In order to measure the emotions experienced by the students during the course process, the students were asked the question "Which aspect was the most favorable in the course instruction of identities using geometric shapes? Why?" and four codes with respect to the theme "Effect of Visualization on Emotions" were determined from the responses given to this question. As the student views were examined in terms of the frequency distributions, the most preferred codes, respectively, were found to be "easier learning of the course" (f=9), "more enjoyable course period" (f=8), "dullness eliminated from the course" (f=4), and "increase in the interest against the course" (f=3). Several student views regarding this theme are as follows;

*"There were things I liked. I learned better when our teacher explained equations with geometric shapes. We understand what comes from where better."* (K11)

*"Identities topic became easier and I started to like it."* (K6)

*"Since the identities lesson shown with shapes made the subject more enjoyable, the taught topic never got boring."* (K18)

*"The course is generally enjoyable, instruction with visuals helps our comprehension."* (K10)

*"I liked the visual representation of the algebraic expressions with unknowns."* (K23)

Once more, as well as the abovementioned responses, the specific response by a student, *"I liked that it was not a method of memorizing"* (K20), could be considered as a finding that the use of mathematical models is an important factor in achieving a significant learning.

In order to measure the students' views about the method used in the course, the students were asked the question, "Is the method used in the instruction of this course important according to you, please explain your reasons?" and three codes related to the theme "Significance of Visualization" was determined from the answers given to this question. Once student views were examined in terms of frequency distributions, it was determined that the most preferred codes, respectively, were "visualization is important" (f=12), "visualization offers a new perspective" (f=8) and "visualization is unimportant" (f= 3). Several student views regarding this theme are as follows;

*"It is very important because many people have a negative feeling toward mathematics. Such methods can change the point of view towards mathematics."* (K17)

*"It is important because the method used helps the student to comprehend and to participate in the course."* (K3)

*"Of course, it is important. Eventually, this method enabled us to have permanent learning instead of memorizing in courses."* (K10)

*"It is important. Because the used method helps us to listen to the course subjects in a better and more careful manner."* (K7)

*"It is important because it helps the listener to focus more efficiently on the course."* (K8)

In addition to the responses above, the response of a student stating, *"it is important because we learnt the course with comprehending the subjects and it delivered us the ability of creativity"* (K20) could be considered as another finding that the utilization of the method is important in terms of developing the ability of creativity.

In the present study, the students were asked the question “At which point you were challenged most, why?” in order to measure the negative aspects of the model and three codes were determined within the “Challenges Encountered in Visualization” theme with respect to the responses given to this question. The evaluation of student views with respect to frequency distribution revealed the most preferred codes as “unknown values” (f=13), “operation processing” (f=7), and “transition from algebraic structure to visual structure” (f=3), respectively. Several student views regarding this theme are as follows;

*“I have trouble with the unknowns.” (K14)*

*“Although the instruction is easy, I sometimes struggle to distinguish the unknowns from the knowns because of my background in humanities.” (K1)*

*“I had a hard time in the beginning of the course to comprehend the unknowns.” (K24)*

*“I was challenged when I first saw the topics I did not know.” (K22)*

*“The instruction is easy and enjoyable but some of the unknowns make operations hard.” (K18)*

Again, in addition to the responses stated above, the response of a student, *“I was challenged by loss of time while re-solving my wrong answers” (K21)*, could place an emphasis on the issue that the applied method might be impractical in terms of time management.

In order to measure the sensations of the students during the instruction process, the students were asked the question, “What did you sense when you saw that the algebraic expressions were represented with geometric shapes?” and three codes were determined within the “Visualization and Sensations” theme with respect to the responses to this question. Student views were analyzed in terms of frequency distributions and the most preferred codes were found to be “a sensation of surprise” (f=10), “a sensation of happiness” (f=10) and “a sensation of fear” (f=4), respectively. Several student views regarding this theme are as follows;

*“I was surprised because it was a bit strange, I’ve never seen it before.” (K5)*

*“I was very frightened at first because I thought the course would be more difficult. But it became more enjoyable and easy.” (K4)*

*“I felt strange, I had no idea before that mathematics could be taught using geometric shapes.” (K2)*

*“To be honest, as a person who feared mathematics and thought could not have an achievement in mathematics, I felt relieved and accomplished.” (K18)*

*“I was surprised actually. Because I had no idea about this subject.” (K8)*

In addition to the abovementioned responses, the response from a student stating *“I was really excited. It felt like I was playing Sudoku and the courses were passing nicely” (K14)*, demonstrated a significant finding that course process could be carried out as a puzzle and a game.

In the study, the students were asked the question, “What kind of skills you gained from the representation of algebraic expressions through geometric shapes?” in order to measure the gained skills and awareness about these skills, and the responses to this question revealed three codes within the theme of “Visualization Skills.” When student views were examined with respect to frequency distributions, it was determined that the most preferred codes were “practical skills” (f=12), cognitive skills (f=10), and “psychomotor skills” (f=4), respectively. Several student views regarding this theme are as follows;

*“After I learned the subject, I began to produce practical solutions and solve the questions when I saw the shapes.” (K4)*

*“It gave me a skill in terms of thinking, I think more rapidly and sound when I have to solve a problem.” (K17)*

*"Previously, I was not interested in algebraic expressions and they looked difficult. But in this respect, getting out of the traditional method with geometric shapes allowed me to be faster and more practical." (K1)*

*"I tried new and different solution methods and found practical solutions by combining with geometry." (K12)*

*"Visual material facilitated my practical comprehension skill." (K9)*

In addition to the responses above, another student's response, *"I developed a visual thinking skill" (K15)*, could be interpreted as a finding that the models are important in developing an individual's visual intelligence.

In the study the students were asked the question, "In which other areas would you like to use the visualization of mathematics through geometric shapes? Why?", in order to measure the established relationship between the method and areas of instruction and three codes were determined from the responses to this question within the theme of "Visualization and Areas of Instruction". Once the student views were examined through frequency distribution, it was revealed that the most preferred codes were algebra instruction (f=13), geometry instruction (f=8), and data collection instruction (f=3), respectively. Several student views regarding this theme are as follows;

*"Its use in other areas of mathematics could be useful. For example, it can be used for functions." (K12)*

*"I would like to use it with all subjects in mathematics. It can be easier to present subjects with shapes. For example, polynomials can be chosen as a sample subject." (K9)*

*"It can be used in subjects such as polynomials, where unknowns exist." (K20)*

*"It has to be used in other areas of mathematics as well. For example, the derivations could be learned more easily if taught with geometric shapes." (K1)*

*"I would like it to be used in other areas of mathematics, especially in equations." (K13)*

As the last step in research, the students were asked the question, "Do you think that the method used in this course establishes a relationship between the course content and the daily life?" in order to measure how well the students use the method to establish connections with daily life and three codes were determined from the responses to this question within the "Visualization and its Relationship with Daily Life" theme. When student views were evaluated with respect to the frequency distribution, it was determined that the most preferred codes were "helps to establish relationships with daily life" (f=20), "has no connection with establishing relationships with daily life" (f=2), and "data does not establish relationships with daily life" (f=2), respectively. Several student views regarding this theme are as follows;

*"Yes. For example, we do similar calculations when calculating the area of a field in daily life." (K23)*

*"Yes, it has a relationship. Let's think about a piece of wood for example. In daily life, it is possible to use the concepts of identity, which we apply in the course, to shape this wood." (K13)*

*"Yes, because we can think of mathematics at a universal scale." (K11)*

*"Yes, it helps us establish relationships." (K24)*

*"Yes, because we can establish a similar relationship with the games on smartphones." (K14)*

According to the students' opinions summarized above, it is possible to assert that geometric models have positive effects on the teaching process of algebraic identities. The model has provided support for the students to geometrically interpret an algebraic connection, while at the same time they have tended to reversely understand the algebraic formulas of a geometric expression. Thus, they have behaved in accordance with the goals of the restructured program. The students have tried to

emphasize in their expressions that they have gained the ability to relate geometry and algebra to daily life activities. Another important research result is the increase in students' ability to establish the relationship between shape's edge/side and area in geometry. Indeed, keeping in mind that the present study was conducted on the identities, besides the increase in their ability to establish a relation between algebra and geometry, the increase in students' ability to establish a relationship between the shape's edges/sides and area can also be regarded as a mathematical gain.

### **Discussion, Conclusion and Implications**

In the present study that employed the explanatory design from the mixed methods, which utilized qualitative and quantitative data collection and analysis, the quantitative dimension pointed out that instruction of algebraic expressions through visuals increased student achievement more when compared to the traditional instruction methods. In the qualitative dimension of the study, it was found that visuals positively evolved the teaching process of algebraic expressions. In addition, the participant students pointed out those visuals made the teaching process more interesting and entertaining, leading them away from memorizing, and providing them with permanent learning of the relevant subjects. It is known that during the learning process, students have difficulties in understanding and interpreting some mathematical formulas. It was stated that after the teaching activities using visuals, students' concerns about mathematics decreased, their self-confidence levels improved, and their curiosity in math increased (Durmuş & Karakırık, 2006; Hamersma, 2002; Konyalıoğlu, 2003). The results of these studies overlap with the results of this present study. As a result of the additional results obtained in the present study, the transition between geometry and algebra, the change of attitude and perspective towards mathematics after enrichment of teaching process with visuals, and the acquisition of conceptual knowledge in mathematics are considered as important gains for the students. From this point of view, visualization is crucial in enabling students to discover knowledge.

The study found that the identities and binomial expansion achievement level of the students in both experimental and control groups statistically significantly increased at the end of the four-week training period. However, it appears that the students in the experimental group were more successful than the students in the control group, probably because of their richer visualization experiences. Özdemir et al. (2005) conducted a study on students in secondary education institutions and indicated that students who had experience in visualization applications were more successful in their ability to use visuals in mathematics. This present study concluded that success levels of the students, who had received geometric visualization in lessons, were significantly higher than that of the students receiving traditional education. This result also supports the results of other similar studies (Çiltaş & Işık, 2012, 2013; English, 2004; Sağırılı, Kırmacı & Bulut, 2010).

The importance of meaningful learning and constructing concepts in the minds is at the forefront of contemporary education systems. In the study, the students were asked the question "What do you think are the benefit(s) of this course to be instructed by using geometric shapes in terms of your achievement?" and three codes for the "Visualization and Achievement" theme were determined from the responses to this question. The student views were examined in terms of frequency distributions and the most preferred codes, respectively, were found to be visualization enhances persistence, visualization contributes to better comprehension on the subject, and visualization enhances tangibility. Evidence and proofs in the teaching process is undoubtedly a great asset (Dede & Karakuş, 2014; Hanna, 2000). Evidence of proof on mathematical expressions enhances mathematical thinking (Stylianides, 2007). Visualization has a positive contribution to the understanding of the proof procedures in mathematics (Hanna & Sidoli, 2007). It is stated that the visual images, which have an important place in the thinking process of individuals, contribute greatly to their learning and interpreting skills (Presmeg, 2006; Stylianou & Silver, 2004). In addition, visual-based proofs provide learners with information about the nature of the formulas, allowing them to avoid memorizing but acquire permanent learning. It also helps them overcome their mistakes and resolve their difficulties in understanding relevant subjects

(Tekin & Konyalıoğlu, 2010). For example, in this study, a student's answer of "I think it's useful for me to improve my proof ability" can be considered as a sign for that the use of visual models is important in the proof process and the study has created an awareness of this issue in students.

To identify the emotions experienced by the students during the course process, the students were asked the question "Which aspect was the most favorable in the course instruction of identities using geometric shapes? Why?" and four codes with respect to the theme "Effect of Visualization on Emotions" were determined from the responses given to this question. Once the student views were examined in terms of the frequency distributions, the most preferred codes, respectively, were found to be Easier learning of the course, more enjoyable course period, Dullness eliminated from the course, and Increase in the interest against the course. According to Keskin (2008), the basic principle of visualization is to improve students' mathematical thinking skills, clarify complex situations, and provide the students with a clearer idea. The students were asked the question, "Is the method used in the instruction of this course important according to you, please explain your reasons?" in order to measure the students' views about the method used in the course and three codes related to the theme "Significance of Visualization" was determined from the responses to this question. The student views were examined in terms of frequency distributions and it was revealed that the most preferred codes were visualization is important, visualization offers a new perspective, visualization is unimportant, respectively. One student has answered the question as follows: "It is important because we have understood the lesson and it has enabled us gain creativity." This answer can be thought of as a further indication that it is important to use the relevant method for developing of students' creativity. English and Watters (2005) have emphasized that the problem solving by using visual models is very important for students to improve their cognitive and critical thinking skills.

The students were asked the question "At which point you were challenged most, why?" in order to measure the negative aspects of the model applied in the present study and three codes were determined within the "Challenges Encountered in Visualization" theme with respect to the responses to this question. The evaluation of student views with respect to frequency distribution revealed that the most preferred codes were unknown values, operation processing, and transition from algebraic structure to visual structure, respectively. The reason for such an outcome could stem from the fact that the unknowns and the operation process are abstract concepts. Konyalıoğlu (2003) points out that learning and teaching difficulties stemming from the abstraction of mathematics leads mathematics educators to conduct research in this direction. Baykul (1997) underlines that it is generally difficult to obtain abstract concepts, and also emphasizes that the reason for the difficultness of mathematics for some students may be the difficulty of obtaining abstract concepts, but suggests that this difficulty can be solved or minimized by using concrete materials or by concretization during the teaching of mathematical concepts. In addition, in the present study, the students were asked the question, "What did you sense when you saw that the algebraic expressions were represented with geometric shapes?" in order to measure the sensations of the students during the instruction process and three codes were determined within the "Visualization and Sensations" theme with respect to the responses to this question. Student views were examined in terms of frequency distributions and the most preferred codes were found to be a sensation of surprise, a sensation of happiness, and a sensation of fear. According to Bloom, about one fourth of the variables of learning success are due to the affective characteristics of students (Altun, 1995). In order to measure the gained skills and awareness about these skills, the students were asked the question, "What kind of skills you gained from the representation of algebraic expressions through geometric shapes?" and the responses to this question revealed three codes within the theme of "Visualization Skills." The student views were examined with respect to frequency distributions and the most preferred codes were determined as practical skills, cognitive skills, and psychomotor skills, respectively. Konyalıoğlu (2003) reports that visualization or use of concrete materials in the process of learning and teaching of abstract concepts has improved the students' both cognitive and affective skills. Konyalıoğlu (2003) also emphasizes that visualization of abstract concepts in mathematics gives meaning to abstract mathematical expressions so that makes the learner understand mathematical relations more easily and more practically.

In the study, in order to measure the established relationship between the areas of instruction by the students, they were asked the question, “In which other areas would you like to use the visualization of mathematics through geometric shapes? Why?”, and three codes were determined from the responses to this question within the theme of “Visualization and Areas of Instruction.” Once the student views were examined through frequency distribution, it was revealed that the most preferred codes were algebra instruction, geometry instruction, and data collection instruction, respectively. As a support of this result, the students, who participated in this present study, stated that geometric representations could be used in other areas of mathematics and algebra. Similar to Akman, Yükselen and Uyanık (2000), this study revealed that even before the application, some of the students had the idea that geometric visualization should be included in the mathematics curriculum.

It is of course important that the teaching process should be structured to link course content and methods with daily life activities. Indeed, one of the basic principles of education is its proximodorsal development. Therefore, it is important to learn information by establishing its link with daily life. In this regard, the identities were linked to daily life events in the course of study, and then concrete examples related to these visuals (including the examples of field areas and warehouse volumes, etc.) were examined so that the students were tried to create meaningful learnings in their minds. In this context, in order to measure how well the students, use the method to establish connections with daily life the students were asked the question, “Do you think that the method used in this course establishes a relationship between the course content and the daily life?” and three codes were determined from the responses to this question within the “Visualization and its Relationship with Daily Life” theme. The evaluation of the student views through frequency distribution pointed out that the most preferred codes were Helps to establish relationships with daily life, has no connection with establishing relationships with daily life, and Data does not establish relationships with daily life, respectively. It is suggested that the modeling studies through visuals should start from primary school years so that students can meaningfully develop their skills for and the process of using mathematics in real life (English & Watters, 2005). The obtained mathematical results should be reconciled with actual situations using visuals, and transformed into real results (Borromeo Ferri, 2006). Similarly, Blum (2011) has examined the approaches of the 8th-10th grade students to solve modeling problems through using visuals, and stated that whether the solutions obtained were meaningful in real life. In this framework was not paid attention to, so it may be advisable for future researches to create and implement new visually-supported teaching methods. Keeping in mind that the visualized information realizes more permanent learning in the mathematics teaching process, undergraduate courses for the development of visually enriched teaching environments can be added to the relevant curricula. It should also be considered that in-service training seminars on this topic can be given to actively working mathematics teachers.

## Türkçe Sürüm

### Giriş

Matematik, sembol ve şekiller üzerine kurulmuş evrensel bir dildir; bilgiyi işlemeyi (düzenleme, analiz etme, yorumlama ve paylaşma), üretmeyi, tahminlerde bulunmayı ve bu dili kullanarak problem çözmeyi içerir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2009). Matematik, genellikle gerçek yaşamdan uzaklaşmış veya kopuk ve sadece okullarda öğrencilerin dersi geçip bir daha karşılaşmak istemedikleri bir ders olarak görülmektedir (Durmuş & Karakırık, 2006). Soyut matematiksel kavramların zihinde yapılandırılması ve bu kavramlara anlam verilebilmesi oldukça güçtür (Konyalıoğlu, 2003). Matematiğin temel alanlarından biri olan cebir alanının son derece soyut kavramları (bilinmeyenler, cebirsel ifadeler vb.) içerdiği söylenebilir. Bu soyut kavramlardan biriside özdeşlik kavramıdır. Nitekim özdeşlik kavramı Türk Dil Kurumu (TDK) tarafından “iki yanı birbirinin aynısı olan veya harflerle verilen sayısal değerler ne olursa olsun iki yanında sayıca eşit değerler alan eşitlik” olarak tanımlanmıştır” (TDK, 2017).

Matematiksel bir kavramın tam olarak öğrenilebilmesi için birey öncelikle o kavramı zihninde tamamen anlamalı ve yorumlayabilmelidir. Bu ise bireyin zihinsel gelişiminin belirli bir düzeye getirilmesi ile sağlanabilir. Soyut matematiksel kavramların zihinde yapılandırılması ve bu kavramlara bir anlam verilmesi oldukça zordur. Matematikte soyut kavramların öğrenilmesi üst düzeyde bilişsel etkinliklerin yapılmasının gerektirir. Soyut kavramların mümkün olduğunca somutlaştırılması bu zorluğu gidermeye yönelik olarak kullanılabilir (Konyalıoğlu, 2003). Geleneksel matematik eğitimi anlayışında matematiksel bilgiler küçük beceri parçacıklarına ayrılmış olarak öğretmen tarafından öğrenciye verilir. Öğrencilerinden, bu bilgileri verilen alıştırmalarla tekrar etmeleri beklenir. Soruların önceden belirlenmiş yanıtlama yöntemi veya yöntemleri ve tek bir yanıtı vardır. Böylece en çok soruyu en kısa yoldan ve en çabuk yanıtlayan öğrenci en başarılıdır. En iyi ve en doğruyu bilen öğretmenden bunları öğrenmek durumundadırlar (Olkun, Yıldız, Sarı, Uçar & Turan, 2014, p. 1544). Koğ ve Başer (2011) çalışmalarında ders işlenişinde kullanılacak materyaller açısından zengin ve dikkat çekici bir öğrenme ortamının hazırlanmasının ve öğretimin görsel veya işitsel araçlarla desteklenmesinin bilginin öğrenci zihninde sistemli bir şekilde işlenişini hızlandırmakta, kolaylaştırmakta ve bu süreci öğrenen için daha zevkli hale getirmekte olduğunu ifade etmişlerdir.

Matematiğin temel öğrenme alanlarından olan cebir konusunun öğretiminde geometrik gösterimler yoluyla görselleştirmenin önemi yadsınamaz. Cebir temel alanının amacı, öğrencilerin sembolik ve grafiksel gösterimlerin anlamlarının farkında olmaları, onları kullanarak sonuçlar ve ilişkiler bularak, sonuçları ve ilişkileri sembol ve grafik yardımıyla ifade etmektir. Geometri temel alanının amacı ise, düzlemde ve üç boyutlu uzayda geometrik nesnelerin özelliklerini tanıma, aralarındaki ilişkileri bulma, geometrik yeri tanımlama, dönüşümleri açıklama, ifade etme ve geometrik önermeleri kanıtlama olarak özetlenebilir (Baki, 2008, p. 333). Görselleştirme, özellikle matematiksel kavramların animasyonunda, öğrencilerin kavramları keşfetmelerinde ve bunlar arasında ilişkileri ortaya çıkarmalarında önemli rol oynar. Analitik yaklaşım ise okullarda eğitim faaliyetlerinde nadiren öğrencileri zihinlerinde bir görüntü oluşturmaya teşvik eder veya öğrenci bunu yapmaya teşvik edildiğinde bile, öğretim materyallerinin sağladığı küçük görsel destekle zihinsel bir görüntü oluşturmada zorlanabilir (Hamersma, 2002).

Öğrenmenin gerçekleşmesi için öğrencilerin aktif olarak araştırılan kavramlar veya nesnelerle (soyut veya somut) etkileşimde olması gerekli görülebilir. Görselleştirmeler, öğrencilerin daha zorlu matematiksel kavramları somutlaştırmayı ve öğrencilerin bu kavramlarla olan etkileşim düzeylerini arttırmayı amaçlamaktadır. Bununla birlikte, görselleştirmeler çoğunlukla statik medya şeklinde (örneğin, kâğıt veya kara tahta üzerinde çizimler gibi) yapılmaktadır. Bu ise keşif ve manipülasyonun büyük oranda öğrencilerin zihinlerinde yapılmasını gerektirmekte ve dolayısıyla sınırlı keşif imkânı ve azaltılmış epistemik yarar sağlamaktadır. Bu nedenle, statik görselleştirmeler, öğrencileri pozitif öğrenme deneyimlerine yardımcı olan keşif etkinliklerine dâhil etmede yetersiz kalabilir. Özellikle erken

yaşlarda öğrencilerin görselleştirme ve bilişsel yetenekleri büyük oranda ilk oluşum aşamasında olduğu için, daha büyük sorunlarla karşı karşıya kalabilirler (Liang & Sedig, 2010).

Görselleştirme, matematik öğrenmede tamamen pozitif bir faktördür, ancak öngörülemez bir sonuç değildir. Matematiksel kavramları örneklerle açıklamak için sesli, iyi planlanmış görsel bir modelin veya yorumun bulunması, öğrencilerin öyle bir modelle yapılan öğretim faaliyetinden sonra onların kurallar oluşturmasına ve kişisel kolaylık sağlamasına yardımcı olabilir. Öğrenciler o zaman öncekilerini test etmek için başvurabilecekleri bir şeye sahip olacaklarından, matematik kişisel anlam taşımaya başlar (Hamersma, 2002). Matematiksel kavramların somut hale getirilmesi tüm konular için pek mümkün görünmüyor olsa da onları yarı somut hale getirmeye çalışmak bile kavramların öğrenilmesi ve öğretilmesinde kolaylıklar sağlayacaktır (Yenilmez & Şan, 2008). Matematikte görselleştirmenin en önemli yararı, çok soyut bir kavramı daha az soyut veya somut hale getirmesidir. Bu işlem, özellikle soyut matematiksel kavramları anlamaya çalışan öğrenciler için önemlidir (Taşova & Delice, 2011). Matematik öğrenmede, görselleştirme, matematiksel problemleri keşfetmek ve matematiksel kavramlara ve bunlar arasındaki ilişkileri anlamlandırmak için güçlü bir araç olabilir. Görselleştirme, çok sayıda bilgiyle uğraşırken karmaşıklığı azaltmaya olanak tanır (Rösken & Rolka, 2006). Görselleştirme bireylerde boyutlu düşünme yeteneğini geliştirir. Öğrenci merkezli, sorgulayarak öğretme ve iki ya da üç boyutlu düşünme esasına göre ezbersiz eğitimin uygulanması ortaokulda ve lisede özdeşliklerin öğretim kalitesini artırır. Şekil ve boyut kavramlarının yerleşmesi, çocuğun düşünce dünyasını ve bilişsel gelişimini olumlu yönde etkiler dolayısıyla çocuğun iki ya da üç boyutlu düşünme yeteneğini geliştirir. İki ya da üç boyutlu düşünme yeteneğini geliştiren çocuklar olaylara farklı açılardan bakarak fikir alışverişi ve toplu tartışma bilinci kazanır (Özdemir, Duru, & Akgün, 2005). Görselleştirme üç temel yolla gerçekleştirilebilir: Şekiller ya da grafikler, animasyonlar ve bilgisayar yazılım programları. Şekiller ya da grafikler; soyut ya da cebirsel ifadelerin geometrik modeller yardımı ile sunulması şeklindedir. Animasyon; soyut ya da cebirsel ifadelerin geometrik modellerinin hareket veya aksiyon olarak dinamik bir şekilde sunumu şeklindedir. Bu yaklaşımlardan; şekiller ya da grafikler sabit şekilleri, animasyon hareketli şekilleri ve bilgisayar yazılım programları ise geometrik (sabit ve hareketli) şekillerle cebirsel çözümleri içine almaktadır (Konyalıoğlu, 2003).

Öğrencilerdeki temel cebirsel kavramların oluşumu ve cebirsel düşüncenin gelişimi ilköğretim çağında başlayan ve devam eden cebir öğretimi ile yakından ilişkilidir (Uyangör & Övez, 2012). Ancak cebir öğretimi alanındaki yapılan çalışmalarda; öğrencilerin cebirsel ifadelerde kullanılan sembolleri anlamada, bir problem durumunu cebirsel olarak ifade etmede, cebirsel yöntemleri kullanmada zorlandığı (Dede, Yalın & Argün, 2002) ve yine öğrencilerin cebir öğrenme alanında geçen “denklem kurma ve kurulan denklemi çözme” problemlerini anlamada sorunlarla karşılaştığı belirtilmiştir (Yenilmez & Avcu, 2009). Özellikle cebir ve geometri derslerinde, geleneksel öğretim yöntemiyle, tebeşir ve tahta kullanılarak gerçekleştirilen eğitim ve öğretim faaliyetlerinde görselleştirme uygulamalarının eksikliği de göze çarpmaktadır. Bu çerçevede cebir ve geometri alanındaki öğretim faaliyetlerinde öğrencilerin kavram kargaşası yaşadığı, cebirsel ifadeler ile geometrik şekilleri birbiriyle ilişkilendirmede yetersiz bilgiye sahip olduğu görüşü ön plana çıkmakta, dolayısıyla matematik derslerinin geometrik gösterim temelli etkinliklerle desteklenmesinin akademik başarıyı artıracığı düşüncesi doğmaktadır. Tüm bunlardan hareketle görselleştirme kullanılarak yapılan öğretimin öğrencilerin matematik başarısına etkisinin incelenmesi ve bu konudaki öğrenci görüşlerinin alınarak değerlendirilmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Ayrıca, öğrencilerin görselleştirme kullanılarak yapılan öğretim konusuna pek fazla aşina olmadıkları ya da ders etkinliklerini geometrik görsellerle zenginleştirmeye çok yer vermek istememeleri düşünüldüğünde geometrik görsellerin ne anlama geldiği, matematik müfredatında geometrik görsellerin neden bulunması gerektiği gibi soruların cevaplandırılması ve görselleştirme kullanılarak yapılan öğretim ile ilgili bazı temel noktaların açıklanması sebepleriyle yapılan bu araştırmanın alana katkı sunacağı düşünülmektedir.

### **Araştırmanın Amacı**

Bu araştırmanın temel amacı, matematikte  $(ax+b)^n$  biçimindeki özdeşliklerin, görselleştirme kullanılarak yapılan öğretiminin öğrenci başarısına etkisini incelemek ve bu konudaki görüşlerini almaktır. Bu temel amaç doğrultusunda şu iki alt probleme cevap aranmıştır:

- Matematikte görselleştirme kullanılarak yapılan öğretimin uygulandığı deney grubu ile geleneksel öğretim yönteminin uygulandığı kontrol grubu öğrencilerinin başarıları arasında anlamlı bir farklılık var mıdır?
- Matematikte görselleştirme kullanılarak yapılan öğretimin uygulandığı deney grubu öğrencilerinin öğretim süreci hakkındaki görüşleri nelerdir?

### **Yöntem**

#### **Araştırma Deseni**

Araştırmada, nitel ve nicel verilerin birlikte toplanarak analiz edildiği karma desenlerden açıklayıcı desen kullanılmıştır. Nicel kısım ön-test son-test eşleştirilmiş kontrol gruplu yarı deneysel desen, nitel kısım ise içerik analizi kullanılarak yürütülmüştür. Nicel veriler deney grubu öğrencilerinden derlenen nitel görüşlerle desteklenmiştir.

#### **Çalışma Grubu**

Araştırmanın çalışma grubunu, 2015-2016 öğretim yılı bahar döneminde Munzur (Tunceli) üniversitesinin Çemişgezek Meslek Yüksekokulu'nun birinci sınıflarında okuyan ve Matematik II dersini alan yapı denetimi programı ve bankacılık ve sigortacılık programı öğrencileri oluşturmaktadır. Bu programların seçilmesinde öğrencilerin Yükseköğretime Geçiş Sınavı yerleştirme puanlarının birbirine yakın olmasının yanında, cinsiyet ve öğrenci sayısı açısından sınıfların homojen olması da etkili olmuştur. Matematik II dersi ilgili meslek yüksekokulunda 1. Dönem okutulan Matematik I dersinin devamı olarak yürütülmekte ve özdeşlikler konusuyla ilgili temel beceriler 1. Dönemde verilmektedir. Ayrıca öğrencilerin Yükseköğretime Geçiş Sınavı yerleştirme puanları ve ortaöğretimde almış oldukları eğitimler hazır bulunuşluk düzeylerinin olduğunu kanıtlar niteliktedir. Bu sebeplerle çalışmaya başlamadan önce öğrencilerin hazır bulunuşluk düzeylerinin benzer olması gerekliliği göz önünde bulundurulmuş ve uygulama süreci 2. Dönemde verilen Matematik II dersinde yürütülmüştür. Bu dersin içeriğinde özdeşlikler, çarpanlara ayırma, Binom açılımı ve Pascal üçgeni konuları mevcuttur.

Matematikte görselleştirme kullanılarak yapılan öğretimin akademik başarı üzerindeki etkisinin incelendiği bu çalışma için yapı denetimi programı öğrencilerinden 24 kişi deney grubuna, geleneksel öğretim yönteminin uygulandığı bankacılık ve sigortacılık programı öğrencilerinden 29 kişi de kontrol grubu olarak atanmıştır. Grupların deney veya kontrol grubu olarak atanması rastgele yapılmıştır.

#### **Veri Toplama Süreci**

Deney grubunda görselleştirme kullanılarak yapılan öğretim, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim öğretici tarafından yürütülmüştür. İki farklı öğretim yönteminin, akademik başarı üzerindeki etkisini belirlemek için Özdeşlikler ve Binom Açılımı Başarı Testi (ÖBAPT) (bkz. Ek 2) ön-test ve son-test olarak her iki gruptaki öğrencilere uygulanmıştır. Öğrencilerin konu ile ilgili görüşlerini almak içinde "Öğrenci Görüş Formu (ÖGF)" yalnızca deney grubundaki öğrencilere son-test olarak uygulanmıştır. Deney ve kontrol grubunda konular, ders saatleri düşünülerek dört haftalık sürece (12 ders saati) yayılmış böylece dersin müfredatına uyma ve öğrenme çıktılarını gerçekleştirebilme olanağı sağlanmıştır. Her iki gruptaki öğretim faaliyetlerini aynı öğretim elemanı yürütmüştür. Kontrol grubundaki dersler, öğrencilere ders notu desteği ile düz anlatım yöntemi kullanılarak aynı derslikte işlenmiştir. Özdeşlikler ve Binom açılımı

konusu ders planı kapsamında öğrencilere sınıf ortamında anlatılmış ve daha sonra öğrencilere konuyla ilgili sorular yöneltilmiştir. Öğretim sürecinin bazı bölümlerinde, tartışma, soru cevap gibi yöntemler yer almış, etkinlikler ise öğretici tarafından anlatılarak ve açıklanarak gerçekleştirilmiştir. Deney grubundaki etkinlikler, görselleştirme yoluyla öğretim tekniği kullanılarak öğretici tarafından  $ax+b$  ifadesinin her bir kuvvetini temsil eden çizimler tahtada tümevarımsal bir sistemle öğrencilerin de aktif katılım sağladığı ders ortamında gerçekleştirilmiştir. Bu öğretim sürecinde her bir cebirsel ifadenin geometrik şekillerle nasıl görselleştirilebileceği öncelikle öğrencilere sorularak bulmaları istenmiştir. Alınan cevaplar doğrultusunda cebirsel ifadelerin doğru görselleri tahtada gösterilmiş ve çözümleri yapılmıştır. Böylece, öğrencilerin akademik başarıları üzerine bu yöntemin etkinliği belirlenmeye çalışılmıştır. Cebirsel ifadelerin geometrik şekiller yardımıyla görselleştirme sürecine ilişkin uygulamalar ayrıntılı bir şekilde çalışmanın sonunda verilmiştir (bkz. Ek 1).

### Veri Toplama Araçları

Araştırmada veri toplama aracı olarak araştırmacılar tarafından geliştirilen ÖBAPT (bkz. Ek 2) ve ÖGF (bkz. Ek 3) kullanılmıştır. ÖBAPT uygulanan iki öğretim yönteminin öğrencilerin akademik başarıları üzerindeki etkisini incelemek amacıyla araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir. Başarı testi için “Özdeşlikler ve Binom Açılımı” konusuna uygun, her biri 4 açık uçlu olacak şekilde 15 soru hazırlanmıştır. Hazırlanan sorular ikisi matematik eğitimi biri eğitim bilimleri alanında yetkin (en az beş yıl deneyime sahip) üç öğretim üyesine verilerek uzman görüşü alınmıştır. Uzmanlara bir haftalık süre çerçevesinde incelemesi için test soruları verilmiş, alınan dönütler neticesinde sorular kavramsal ve içerik bağlamında yeniden düzenlenmiştir. Yapılan düzenlemeler sonucunda elde edilen nihai test açık uçlu 10 sorudan oluşmaktadır. Testte  $ax+b$  ifadesinin ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve n. kuvvet açılımları ile ilişkili problem cümleleri yer almaktadır. Bu düzenlemeler doğrultusunda testten alınabilecek en yüksek puan 100 en düşük puan ise 0 olmuştur.

Öte yandan, ÖGF nitel verilerin elde edilebilmesi için literatür taraması yapılarak araştırmacı tarafından geliştirilmiş, sekiz açık uçlu sorudan oluşan bir formdur. Formdaki sorular öğrencilerin, görsellerle matematik dersinin öğretim sürecinde en çok neyi sevdikleri, neden hoşlandıkları, bu konudaki olumlu/olumsuz görüşleri, en çok zorlandıkları noktalar ve geometrik görsellerin diğer konularda nasıl kullanılabileceği ile ilgilidir. Bu form için araştırmacılar 10 adet açık uçlu soru oluşturmuş ve bunları yine ÖBAPT’yi inceleyen uzmanların görüşüne sunmuştur. Yapılan işlemlerden sonra sorulardan iki tanesi teknik ve içerik olarak uygun olmadığı düşünülerek formdan çıkartılmıştır.

### Verilerin Analizi

Deney ve kontrol gruplarının ön-test puanları arasındaki farkın anlamlılığı ilişkisiz örneklem t-testi, deney ve kontrol gruplarının ön-testten son-teste puanları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığı ilişkili örneklem t-testi yardımıyla incelenmiştir. Deney ve kontrol grubunun son-test puanları arasındaki farkın anlamlılığı ise grupların ön-test puanlarının kovaryans olarak alındığı tek yönlü kovaryans analizi (ANCOVA) kullanılarak incelenmiştir. Araştırmada derlenen nicel veriler SPSS 21.0 kullanılarak analiz edilmiştir.

ÖGF kapsamında elde edilen nitel veriler öncelikle bir tablo haline getirilerek cevaplar incelenmiş, genel eğilimin hangi yönde olduğuna bakılarak betimlenmiş ve bulgular öğrencilerin cevapları kullanılarak doğrudan alıntı yoluyla sunulmuştur. Alıntılar yapılırken öncelikle öğrencilerin her bir soru ile ilgili görüşleri incelenmiş, diğer cevaplara göre daha fazla verilen yanıtlar birebir alıntılanmıştır. Ayrıca tüm cevaplarla ilgili genel eğilimler ise içerik analizi yöntemiyle ifade edilmiştir. Burada görüşler verilirken öğrenci isimleri K1, K2, K3 vb. şeklinde kodlanmıştır.

## Bulgular

### Özdeşlikler ve Binom Açılımı Başarılarına İlişkin Bulgular

Araştırmada geleneksel öğretim yönteminin uygulandığı kontrol grubu öğrencileri ile geometrik görselleştirme öğretim yönteminin uygulandığı deney grubu öğrencilerinin uygulama öncesi ve sonrası ÖBAPT’deki performanslarına ait betimsel istatistik değerleri Tablo 1’de gösterilmektedir.

**Tablo 1.**

*Deney ve Kontrol Gruplarına İlişkin ÖBAPT Öntest ve Sontest Betimleyici İstatistikler.*

Grup	Test	$\bar{X}$	Ss	t	Sd	p	F	p
Deney (n=24)	Ön-test	7.63	.78	-14.75	23	.00	354.29	.00
	Son-test	69.21	2.35					
Kontrol (n=29)	Ön-test	4.83	.43	-7.22	28	.00	3.33	
	Son-test	58.72	1.24					

Tablo 1’den de görüldüğü gibi deney grubundaki öğrencilerin çalışma öncesi ve sonrası özdeşlikler ve Binom açılımına dair başarıları kontrol grubundaki öğrencilerden daha yüksek çıkmıştır. Yapılan ilişkisiz örneklem t-testi sonucuna göre iki grubun çalışma öncesi ÖBAPT performansları arasındaki fark anlamlı değildir:  $t(51)=1.66$ ,  $p=.10$ .

Öte yandan, her iki gruptaki öğrenciler de ön-testten son-teste başarılarını fark edilir derecede artırmıştır. Yapılan ilişkili örneklem t-testi, geometrik görselleştirme öğretim yönteminin uygulandığı deney grubundaki öğrencilerin ön-test ve son-test başarı puan ortalamaları arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olduğunu ortaya koymaktadır:  $t(23)=-14.75$ ,  $p=.00$ . Benzer şekilde geleneksel öğretim yönteminin uygulandığı kontrol grubundaki öğrencilerin ön-test ve son-test başarı puan ortalamaları arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olduğu görülmektedir:  $t(28)=-7.22$ ,  $p=.00$ .

Geleneksel öğretim yönteminin uygulandığı kontrol grubundaki öğrenciler ile geometrik görselleştirme öğretim yönteminin uygulandığı deney grubu öğrencilerinin son-test ÖBAPT ortalama puanları arasında anlamlı bir farkın olup olmadığını belirlemek için, ön-test puanları kovaryans olarak alınarak tek yönlü kovaryans analizi (ANCOVA) uygulanmıştır. Buna göre deney ve kontrol gruplarında bulunan öğrencilerin geometrik gösterimlerle öğrenme düzeltilmiş başarı puan ortalamaları arasında anlamlı bir fark olduğu görülmektedir:  $F_{(1,12)}=3.33$ ,  $p=.00$ . Başka bir ifadeyle son test puanları grup değişkeni ile ilişkilidir. Buna bağlı olarak grupların düzeltilmiş başarı puanları arasında yapılan Bonferroni testi sonuçlarına göre deney grubunun başarı puan ortalaması ( $\bar{X}=69.21$ ), kontrol grubunun başarı puan ortalamasından ( $\bar{X}=58.72$ ) yüksek olduğu görülmektedir.

### OGF’ ye İlişkin Bulgular

Araştırmanın nitel boyutuna ait veriler içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Analiz sonucunda oluşan görselleştirme kullanılarak yapılan öğretime ilişkin görüşlere ait temalar, kodlar ve frekans dağılımları Tablo 2’de gösterilmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplar doğrultusunda görselleştirme kullanılarak yapılan öğretime ilişkin görüşlerine ait, “Görselleştirme ve Başarı”, “Görselleştirmenin Duygular Üzerindeki Etkisi”, “Görselleştirmenin Önemi”, “Görselleştirmede Karşılaşılan Zorluklar”, “Görselleştirme ve Hisler”, “Görselleştirme Becerileri”, “Görselleştirme ve Öğrenme Alanları” ve “Görselleştirme ve Günlük Yaşam İlişkisi” şeklinde sekiz adet tema oluşturulmuştur. Elde edilen bulgular aşağıda verilmiştir.

Çalışmada ilk olarak öğrencilere “Bu dersin geometrik şekiller kullanılarak işlenmesinin başarınıza adına faydasının/faydalarının neler olduğunu düşünüyorsunuz?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme ve Başarı” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir.

**Tablo 2.***Öğrencilerin Görselleştirme Algılarına İlişkin Görüşlerine ait Temalar, Kodlar ve Frekans Dağılımları.*

Temalar	Kodlar	f	%
Görselleştirme ve Başarı	Görselleştirmenin kalıcılığı arttırması	10	41.60
	Görselleştirmenin konuyu daha iyi anlamalarına katkıda bulunması	8	33.33
	Görselleştirmenin somutlaştırmayı sağlaması	4	16.60
Görselleştirmenin Duygular	Dersin daha kolay öğrenilmesi	9	37.50
	Ders sürecinin daha eğlenceli olması	8	33.30
Üzerindeki Etkisi	Dersin sıkıcı olma durumundan kurtulması	4	16.60
	Derse olan ilginin artması	3	12.50
Görselleştirmenin Önemi	Görselleştirmenin önemli görülmesi	12	50.00
	Görselleştirmenin yeni bir bakış açısı getirmesi	8	33.33
	Görselleştirmenin önemsiz görülmesi	3	12.50
Görselleştirmede Karşılaşılan	Bilinmeyen değerler	13	54.10
	İşlem yürütme süreci	7	29.10
Zorluklar	Cebirsel yapıdan görsel yapıya geçiş	3	12.50
Görselleştirme ve Hisler	Şaşkınlık hissi	10	41.60
	Mutluluk hissi	10	41.60
	Korku hissi	4	16.60
Görselleştirme Becerileri	Pratikleşme becerisi	12	50.00
	Bilişsel Beceriler	10	41.60
	Psikomotor beceriler	2	8.33
Görselleştirme ve Öğrenme Alanları	Cebir öğrenme alanı	13	54.10
	Geometri öğrenme alanı	8	33.33
	Veri toplama öğrenme alanı	3	12.50
Görselleştirme ve Günlük Yaşam İlişkisi	Günlük yaşamla ilişki kurmada yardımcı olur	20	83.33
	Günlük yaşamla ilişki kurma ile ilişkisi yoktur	2	8.33
	Günlük yaşamla ilişki kurmaz	2	8.33

Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; Görselleştirmenin kalıcılığı arttırması (f=10), Görselleştirmenin konuyu daha iyi anlamalarına katkıda bulunması (f=8) ve Görselleştirmenin somutlaştırmayı sağlaması (f=4) şeklindedir. Öğrencilerin bu temaya ilişkin belirtmiş oldukları görüşlerden bazıları şöyledir;

*“Tatbikî de faydalı çünkü şekil ile ders işlendiğinde ders daha kalıcı olur.” (K4)*

*“Geometrik şekillerin kullanılmasını öğrenim sürecini kolaylaştırdığına inanıyorum. Görsellerin olması daha farklı bakış açıları kazanmamızı sağlamaktadır. Yani geometrik şekiller klasik anlatımın dışına çıktığı için daha kalıcıdır.” (K1)*

*“Şekillerle öğretim sürecinin yürütülmesi bilgilerin aklımızda daha kalıcı olmasını sağladı.” (K10)*

*“Geometrik şekillerle dersin işlenmesi özdeşlikleri daha iyi kavramamı sağladı.” (K21)*

*“Başarıma çok katkı sağladığını düşünüyorum. Çünkü görseller kullanılarak ders işlendiği zaman konuyu kavrama yetim arttı.” (K17)*

Burada verilen cevaplara ek olarak bir öğrencinin *“İspat yeteneğimi geliştirebilmem adına faydalı olduğunu düşünüyorum.” (K23)* cevabı görsel modellerin kullanılmasının önemli bir nokta olduğunu gösteren bir bulgu olarak düşünülebilir.

Araştırmada öğrencilerin dersin işleniş sürecinde yaşadıkları duyguyu ölçmek amacı ile *“Özdeşliklerin geometrik şekillerle ifade edilerek ders işlenmesinin en çok hangi yönü hoşunuza gitti? Niçin?”* sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen *“Görselleştirmenin Duygular Üzerindeki Etkisi”* temasına ait dört adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak

incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; dersin daha kolay öğrenilmesi (f=9), ders sürecinin daha eğlenceli olması (f=8), dersin sıkıcı olma durumundan kurtulması (f=4) ve derse olan ilginin artması (f=3) şeklindedir. Öğrencilerin bu temaya ilişkin belirtmiş oldukları görüşlerden bazıları şöyledir;

*“Hoşuma giden şeyler oldu. Hocamız denklemleri geometrik şekillerle anlatınca daha iyi öğrendim. Neyin nerden geldiğini daha iyi anlıyoruz.” (K11)*

*“Özdeşlikler konusu kolaylaştı sevdiğim bir konu haline geldi.” (K6)*

*“Şekille gösterilen özdeşlikler dersi konuyu daha eğlenceli hale getirdiği için hiçbir zaman anlatılan konu sıkıcı olmadı.” (K18) “Ders genel anlamda eğlenceli geçiyor görsellerle anlatım anlamamıza kolaylık sağlıyor.” (K10)*

*“Bilinmeyenlerin bulunduğu cebirsel ifadelerin şekillerle gösterimi hoşuma gitti.” (K23)*

Yine burada verilen cevaplara ek olarak bir öğrencinin *“Ezber bir yöntem olmaması hoşuma gitti.” (K20)* cevabı eğitim sürecinde matematiksel modellerin kullanılmasının anlamlı öğrenmeler gerçekleştirilmede önemli bir faktör olduğunu gösteren bir bulgu olarak düşünülebilir.

Çalışmada öğrencilerin ders sürecinde kullanılan yöntemle ilgili görüşlerini ölçmek amacı ile *“Sizce bu ders işlenirken kullanılan yöntem önemli midir, gerekçelerini açıklayınız?”* sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen *“Görselleştirmenin Önemi”* temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; görselleştirmenin önemli görülmesi (f=12), görselleştirmenin yeni bir bakış açısı getirmesi (f=8) ve görselleştirmenin önemsiz görülmesi (f=3) şeklindedir. Öğrencilerin bu temaya ilişkin belirtmiş oldukları görüşlerden bazıları şöyledir;

*“Çok önemlidir çünkü birçok insan matematiğe negatif bakıyor. Bu tür yöntemlerle matematiğe bakış açısı değiştirilebilir.” (K17)*

*“Önemlidir, çünkü kullanılan yöntem öğrencinin anlamasını ve derse katılımını sağlıyor.” (K3)*

*“Tabi ki önemlidir. Sonuçta bu yöntem derslerde ezberlemek yerine kalıcı öğrenmelerimizin oluşmasını sağlamıştır.” (K10)*

*“Önemlidir. Çünkü kullanılan yöntem dersi daha iyi ve dikkatli bir şekilde dinlememizi sağlar.” (K7)*

*“Önemlidir çünkü dinleyicinin daha verimli şekilde derse odaklanmasını sağlar.” (K8)*

Yine burada verilen cevaplara ek olarak bir öğrencinin *“Önemlidir çünkü dersi anlayarak işledik bize yaratıcılık yetisi kazandırdı.” (K20)* cevabı yaratıcılık yetisinin geliştirilmesi noktasında ilgili yöntemin kullanılmasının önemli olduğunu gösteren başka bir bulgu olarak düşünülebilir.

Çalışmada uygulanan modelin olumsuz yönlerini ölçmek amacıyla kendilerine *“En çok hangi noktada zorlandınız, niçin?”* sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen *“Görselleştirmede Karşılaşılan Zorluklar”* temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; bilinmeyen değerler (f=13), işlem yürütme süreci (f=7) ve Cebirsel yapıdan görsel yapıya geçiş (f=3) şeklindedir. Öğrencilerin bu temaya ilişkin belirtmiş oldukları görüşlerden bazıları şöyledir;

*“Bilinmeyenler konusunda zorlanıyorum.” (K14)*

*“Anlatım kolay olsa da sözel bölüm çıkışlı olmam sebebiyle bilinenlerle bilinmeyenleri ayırt etmede zaman zaman zorlanıyorum.” (K1)*

*“Konunun başlangıcında bilinmeyenleri anlamakta zorlandım.” (K24)*

*“Bilmediğim konuları ilk kez gördüğümde zorlandım.” (K22)*

*“Ders anlatımı kolay ve zevklidir ancak bazı bilinmeyenler işlemi zorlaştırıyor” (K18)*

Yine burada verilen cevaplara ek olarak bir öğrencinin *“Yanlış çözümlerimi yeniden çözerken fazla zaman kaybetmem beni biraz zorladı.” (K21)* şeklinde verdiği cevap kullanılan yöntemin zaman açısından kullanışsız olabileceği noktasına vurgu yapabilir.

Çalışmada öğrenim süreciyle ilgili öğrencilerin hislerini ölçmek amacı ile “Cebirsel yapıların geometrik şekillerle ifade edildiğini gördüğünüzde neler hissettiniz?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme ve Hisler” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; şaşkınlık hissi (f=10), mutluluk hissi (f=10) ve korku hissi (f=4) şeklindedir. Öğrencilerin bu temaya ilişkin belirtmiş oldukları görüşlerden bazıları şöyledir;

*“Şaşırdım çünkü daha önce hiç görmediğim için biraz tuhaf geldi.” (K5)*

*“Başlangıçta çok korktum çünkü dersin daha zor olabileceğini düşündüm. Fakat ders daha eğlenceli ve kolay bir hal aldı.” (K4)*

*“Tuhaf hissettim daha önce hiçbir şekilde matematiğin geometrik şekillerle işlendiğini bilmiyordum.” (K2)*

*“Doğruyu söylemem gerekirse matematikten korkan ve yapamayacağını düşünen biri olarak ilk defa kendimi rahatlamış ve başarmış hissettim.” (K18)*

*“Aslında şaşırdım. Çünkü bu konu hakkında bilgim yoktu.” (K8)*

Yine burada verilen cevaplara ek olarak bir öğrencinin “Bayağı heyecanlandım. Sudoku çözüyormuş gibi geldi ve dersler güzel geçiyordu.” (K14) cevabı ile dersin işleniş sürecinin bir bulmaca gibi oyun havasında yürütülmesi önemli bir bulgu olarak öne çıkmaktadır.

Çalışmada öğrencilerde oluşan ve kendilerinin farkına vardığı becerileri ölçmek amacı ile “Cebirsel ifadelerin geometrik şekillerle gösterilmesi size ne gibi beceriler kazandırdı?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme Becerileri” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; pratikleşme becerisi (f=12), bilişsel beceriler (f=10) ve psikomotor beceriler (f=4) şeklindedir. Öğrencilerin bu temaya ilişkin belirtmiş oldukları görüşlerden bazıları şöyledir;

*“Konuyu öğrendikten sonra, şekilleri gördüğümde pratik çözümler üretilip soru çözmeye başladım.” (K4)*

*“Düşünce açısından beceri kazandırır bir sorunun çözümünde daha hızlı ve sağlıklı düşünüyorum.” (K17)*

*“Daha önceden cebirsel ifadeler ilgimi çekmiyor ve zor görünüyordu. Ama geometrik şekillerle geleneksel anlatımın dışına çıkılması benim bu konuda daha hızlı ve pratik olmamı sağladı.” (K1)*

*“Yeni ve farklı çözüm yöntemlerini denedim ve geometri ile birleştirerek pratik çözümler buldum.” (K12)*

*“Görsel olması pratik anlama becerimi kolaylaştırdı.” (K9)*

Ayrıca burada verilen cevaplara ek olarak bir öğrencinin “Görsel düşünme yeteneğimi geliştirdim.” (K15) ifadesi ile kişinin görsel zekâsının geliştirilmesinde modellerin önemli olduğunu söylemek mümkündür.

Araştırmada öğrencilerin konu alanları arasındaki ilişki düzeylerini ölçebilmek amacıyla “Cebir’in ya da matematiğin başka hangi alanlarında geometrik şekillerle gösterimi kullanmak isterdiniz? Neden?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme ve Öğrenme Alanları” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; cebir öğrenme alanı (f=13), geometri öğrenme alanı (f=8) ve veri toplama öğrenme alanı (f=3) şeklindedir. Öğrencilerin bu temaya ilişkin belirtmiş oldukları görüşlerden bazıları şöyledir;

*“Matematiğin diğer alanlarında da kullanılması faydalı olabilir. Örneğin, fonksiyonlar konusunda kullanılabilir.” (K12)*

*“Matematikteki tüm konularda kullanmak isterdim. Konuları şekillerle göstermek daha kolay olabilir. Mesela polinomlar örnek konu olarak seçilebilir.” (K9)*

*“Polinomlar gibi bilinmeyenlerin bulunduğu konularda da kullanılabilir.” (K20)*

*“Diğer matematik alanlarında da kullanılması lazım. Örneğin türev konusu geometrik şekillerle anlatılsaydı daha kolay öğrenilebilirdi.” (K1)*

*“Diğer matematik alanlarında özellikle denklemlerde kullanılmasını isterdim.” (K13)*

Araştırmada son olarak öğrencilere kullandıkları yöntemin günlük hayatla ilişki kurmalarına ne kadar yardımcı olduğunu ölçmek amacıyla “Bu dersin işlenişinde kullanmış olduğunuz yöntemin, ders içeriğini günlük yaşamla ilişkilendirdiğini düşünüyor musunuz?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme ve Günlük Yaşam İlişkisi” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; günlük yaşamla ilişki kurmada yardımcı olur (f=20), günlük yaşamla ilişki kurma ile ilişkisi yoktur (f=2) ve veri günlük yaşamla ilişki kurmaz (f=2) şeklindedir. Öğrencilerin bu temaya ilişkin belirtmiş oldukları görüşlerden bazıları şöyledir;

*“Evet. Örneğin, günlük hayatta bir tarlanın alanını hesaplariken de benzer işlemler yapıyoruz.” (K23)*

*“Evet ilişkilidir. Örneğin, bir tahta parçasını düşünelim. Günlük hayatta bu tahtayı şekillendirmek için derste uyguladığımız özdeşlik kavramlarını kullanmak mümkündür.” (K13)*

*“Evet, çünkü matematiği evrensel boyutta düşünebiliriz.” (K11)*

*“Evet, ilişki kurmamıza yardımcı oluyor.” (K24)*

*“Evet, çünkü akıllı telefonlardaki oyunlarla benzer ilişki kurabiliriz.” (K14)*

Yukarıda özetlenen öğrenci görüşlerine göre geometrik modellerin cebirsel özdeşliklerin öğretim sürecini olumlu etkilediğini söylemek mümkündür. Model, cebirsel bir bağıntıyı geometrik anlamlandırmada destek sağlarken öğrenciler bu kez tam tersine geometrik bir ifadenin cebirsel formüllerini anlama eğilimi göstermişlerdir. Böylece yeniden yapılandırılmış programın hedeflerine uygun bir davranış sergilemişlerdir. Öğrenciler ifadelerinde geometri ile cebir arasında ilişki kurma becerisi kazandıklarını vurgulamaya çalışmışlardır. Bir diğer önemli bulgu da geometri içinde kenar ile alan arası ilişki kurmadır. Nitekim yapılan çalışmanın özdeşliklerle ilgili olduğu düşünülürse cebir-geometri arası bağıntı kurmanın yanı sıra kenar-alan arası ilişki kurabilmeleri de matematiksel bir kazanç olarak kabul edilebilir.

### **Sonuç, Tartışma ve Öneriler**

Nitel ve nicel verilerin birlikte toplanarak analiz edildiği karma desenlerden açıklayıcı desenli bu çalışmanın nicel boyutunda, görsellerle cebirsel ifadelerin öğretiminin geleneksel öğretim yöntemine göre öğrenci başarısını daha fazla arttırdığı sonucuna varılmıştır. Çalışmanın nitel boyutunda ise görsellerin cebirsel ifadelerin öğretim sürecini olumlu yönde geliştirdiği bulunmuştur. Ayrıca öğrenciler görüşlerinde, görsellerin öğretim sürecini daha ilgi çekici ve eğlenceli hale getirdiğini, onları ezberden uzaklaştırıp kalıcı öğrenmelere yönlendirdiğini belirtmişlerdir. Öğrenim sürecinde öğrencilerin genel anlamda anlama ve anlamlandırmada sorun yaşadıkları matematiksel formüller olduğu bilinmektedir. Görseller ile yapılan etkinlikler sonrası öğrencilerin matematik kaygılarının azaldığı, özgüvenlerinin geliştiği, merak duygularının arttığı sonucuna ulaşılmıştır (Durmuş & Karakırık, 2006; Hamersma, 2002; Konyalıoğlu, 2003). Bu çalışmaların bulguları araştırmanın bulgularıyla örtüşmektedir. Ek olarak elde edilen bulgular neticesinde geometri-cebir arası geçişin sağlanması, görseller ile zenginleştirme sonrasında matematiğe karşı tutum ve bakış açısının değiştirilmesi, matematikte kavramsal bilginin edinilmesi öğrenciler için önemli kazanımlar olarak görülmüştür. Bu açıdan görsellerle somutlaştırma, öğrencinin kendisinin bilgiyi keşfetmesine imkân vermesi açısından önemlidir.

Çalışmada hem deney hem de kontrol grubundaki öğrencilerin dört haftalık eğitim sürecinin sonunda özdeşlikler ve Binom açılımı konularındaki başarılarının arttığı ve bu artışın istatistiksel olarak anlamlı olduğu bulunmuştur. Ancak deney grubunda bulunan öğrencilerin muhtemelen daha zengin ele alınan görselleştirme deneyimleri sayesinde kontrol grubundaki öğrencilerden daha başarılı olduğu görülmektedir. Özdemir, Duru ve Akgün (2005) ortaöğretim seviyesinde gerçekleştirdiği çalışmasında

görselleştirme uygulamalarında deneyimi olan öğrencilerin matematikte görselleri kullanma yeterlilikleri çerçevesinde daha başarılı olduklarını belirtmektedir. Yapılan çalışmada geometrik görselleştirme yöntemi ile eğitim alan öğrencilerin akademik başarısının, geleneksel eğitim alan öğrencilerinkinden anlamlı derecede yüksek olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu bulgu, benzer başka çalışmaların sonuçlarını destekler niteliktedir (Çiltaş & Işık, 2012, 2013; English, 2004; Sağırılı, Kırmacı & Bulut, 2010).

Anlamlı öğrenme ve bilgileri zihinde yapılandırma kavramlarının önemi çağdaş eğitim sistemlerinde ön plana çıkmaktadır. Çalışmada öğrencilere “Bu dersin geometrik şekiller kullanılarak işlenmesinin başarınız adına faydasının/faydalarının neler olduğunu düşünüyorsunuz?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme ve Başarı” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; Görselleştirmenin kalıcılığı arttırması, Görselleştirmenin konuyu daha iyi anlamalarına katkıda bulunması ve Görselleştirmenin somutlaştırmayı sağlaması şeklindedir. Öğretim sürecinde kanıtların ve ispatların şüphesiz önemi büyüktür (Dede & Karakuş, 2014; Hanna, 2000). Matematiksel ifadeler üzerinde ispatların kanıtlanabilmesi matematiksel düşüncüyü geliştirmektedir (Stylianides, 2007). Matematikte ispat sürecinde görselleştirmenin ispatların anlaşılması üzerinde olumlu katkısı vardır (Hanna & Sidoli, 2007). Yapılan çalışmalarda, bireyin düşünme sürecinde önemli bir yeri olan görsel imajların öğrenme ve anlamaya büyük katkı sağladığı belirtilmiştir (Stylianou & Silver, 2004; Presmeg, 2006). Bunun yanında görsel şekillere dayalı ispatlar, öğrencilere formüllerin doğası konusunda bilgi verir, onların ezberden kaçınıp kalıcı öğrenmeler edinmelerini sağlar. Ayrıca yaptıkları yanlışların önüne geçme ve anlama zorluklarının giderilmesinde (Tekin & Konyalıoğlu, 2010) etkili olur. Örneğin, bu çalışmada bir öğrencinin “İspat yeteneğimi geliştirebilmem adına faydalı olduğunu düşünüyorum.” cevabı görsel modellerin kullanılmasının ispat sürecinde önemli olduğunun çalışmanın öğrencilerde bu konuda bir farkındalık oluşturduğunun göstergesi olarak düşünülebilir.

Araştırmada öğrencilerin dersin işleniş sürecinde yaşadıkları duyguyu ölçmek amacı ile “Özdeşliklerin geometrik şekillerle ifade edilerek ders işlenmesinin en çok hangi yönü hoşunuza gitti? Niçin?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirmenin Duygular Üzerindeki Etkisi” temasına ait dört adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; dersin daha kolay öğrenilmesi, ders sürecinin daha eğlenceli olması, dersin sıkıcı olma durumundan kurtulması ve derse olan ilginin artması şeklindedir. Keskin’e (2008) göre görselleştirmenin temel prensibi öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirerek, karmaşık gözükür durumları belirginleştirmek ve öğrenciye daha anlaşılır bir fikir sunmaktır. Öğretim sürecinin önemli bileşenlerinden birisi şüphesiz yöntemdir. Bu noktadan hareketle çalışmada öğrencilerin ders sürecinde kullanılan yöntemle ilgili görüşlerini ölçmek amacı ile “Sizce bu ders işlenirken kullanılan yöntem önemli midir, gerekçelerini açıklayınız?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirmenin Önemi” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; görselleştirmenin önemli görülmesi, görselleştirmenin yeni bir bakış açısı getirmesi ve görselleştirmenin önemsiz görülmesi şeklindedir. Yine öğretim sürecinde yaratıcılığın önemi şüphesiz büyüktür. Çalışmada bir öğrencinin “Önemlidir çünkü dersi anlayarak işledik ve bize yaratıcılık yetisi kazandırdı.” cevabı yaratıcılık yetisinin geliştirilmesi noktasında bu yöntemin kullanılmasının önemli olabileceğini göstermektedir. English ve Watters (2005) yapmış oldukları çalışmanın bulguları çerçevesinde görsel modeller kullanılarak çözülen problemlerin öğrencilerin biliş üstü ve eleştirel düşünme becerilerini geliştirmede önemli olduğunu vurgulamışlardır.

Çalışmada uygulanan modelin olumsuz yönlerini ölçmek amacıyla kendilerine “En çok hangi noktada zorlandınız, niçin?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirmede Karşılaşılan Zorluklar” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; bilinmeyen değerler, işlem yürütme süreci ve Cebirsel yapıdan görsel yapıya geçiş şeklindedir. Bunun nedeni bilinmeyenler ve işlem sürecinin soyut olması olabilir. Konyalıoğlu (2003) matematiğin soyutluğundan kaynaklanan öğrenme ve öğretme güçlüğüne matematik eğitimcilerini bu yönde araştırma yapmaya sevk ettiğini belirtmektedir. Baykul (1997) genel olarak soyut kavramların kazanılmasının zor olduğunu matematiğin öğrencilere zor

gelmesinin sebebinin belki de bundan kaynaklandığını ancak bu zorluğun matematik kavramlarının öğretimi sırasında somutlaştırılarak veya somut materyaller kullanılarak giderilebileceğini ya da en azından azaltılabileceğini belirtmiştir. Bununla beraber çalışmada, öğrenim süreciyle ilgili öğrencilerin hislerini ölçmek amacı ile “Cebirsel yapıların geometrik şekillerle ifade edildiğini gördüğünüzde neler hissettiniz?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme ve Hisler” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; şaşkınlık hissi, mutluluk hissi ve korku hissi şeklindedir. Bloom’a göre öğrenme başarısındaki değişkenlerin yaklaşık dörtte biri öğrencilerin duyuşsal özelliklerinden kaynaklanmaktadır (Altun, 1995). Öğrencilerde oluşan ve kendilerinin fark etmiş olduğu becerileri ölçmek amacı ile “Cebirsel ifadelerin geometrik şekillerle gösterilmesi size ne gibi beceriler kazandırdı?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme Becerileri” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; pratikleşme becerisi, bilişsel beceriler ve psikomotor beceriler şeklindedir. Konyalıoğlu (2003) soyut kavramların öğrenimi ve öğretimi sürecinde somutlaştırmanın yapılmasının veya somut materyallerin kullanılmasının öğrencilerin hem bilişsel hem de duyuşsal açıdan olumlu yönde geliştiğini raporlamaktadır. Konyalıoğlu (2003) ayrıca matematikte soyut kavramları somutlaştırmanın soyut matematiksel ifadelerle anlam kazandırıp matematikteki ilişkilerin daha kolay ve pratik bir şekilde anlaşılmasını sağladığını vurgulamaktadır.

Araştırmada öğrencilerin konu alanları arasındaki ilişki düzeylerini ölçebilmek amacıyla “Cebir’in ya da matematiğin başka hangi alanlarında geometrik şekillerle gösterimi kullanmak isterdiniz? Neden?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme ve Öğrenme Alanları” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; cebir öğrenme alanı, geometri öğrenme alanı ve veri toplama öğrenme alanı şeklindedir. Bunu destekler şekilde bu çalışmada öğrenciler matematiğin ve cebirin diğer alanlarında da geometrik şekillerin kullanılabileceğine değinmişlerdir. Akman, Yükselen ve Uyanık’ın (2000) ifade ettikleri gibi bu çalışmada da öğrencilerin bazılarının uygulama öncesinde geometrik görselleştirmenin matematik öğretim programının içinde yer almalı görüşüne sahip oldukları ortaya çıkmıştır.

Öğretim sürecinin günlük yaşamla ilişki kuracak şekilde yapılandırılması şüphesiz önemlidir. Nitekim eğitimin temel ilkelerinden birisi de yakından uzağa ilkesidir. Bu yüzden öğrenilen bilgilerin günlük hayatla ilişki kurularak öğrenilmesinin önemi büyüktür. Nitekim ders sürecinde özdeşliklerin günlük yaşamla ilişkisi noktasına değinilirken öncelikle görseller kullanılmış, daha sonra bu görsellerle ilgili somut örnekler (tarla alanlarına ilişkin örnekler, depo hacimlerine ilişkin örnekler vb.) incelenerek öğrencilerin zihinlerinde anlamlı öğrenme oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu noktadan hareketle öğrencilere “Bu dersin işlenişinde kullanmış olduğunuz yöntemin, ders içeriğini günlük yaşamla ilişkilendirdiğini düşünüyor musunuz?” sorusu yöneltilmiş ve bu soruya verilen yanıtlardan elde edilen “Görselleştirme ve Günlük Yaşam İlişkisi” temasına ait üç adet kod tespit edilmiştir. Öğrenci görüşleri, frekans dağılımları ele alınarak incelendiğinde en sık tercih edilen kodlar sırasıyla; günlük yaşamla ilişki kurmada yardımcı olur, günlük yaşamla ilişki kurma ile ilişkisi yoktur ve veri günlük yaşamla ilişki kurmaz şeklindedir. Matematiği gerçek hayatta kullanma süreç ve becerilerinin anlamlı bir şekilde gelişebilmesi için görsellerle modelleme çalışmalarının ilkökul yıllarından itibaren başlaması gerektiği ileri sürülmektedir (English & Watters, 2005). Elde edilen matematiksel sonuçların gerçek durumlar ile görseller kullanılarak bağdaştırılması, gerçek sonuçlar haline getirilmesi gerekmektedir (Borromeo Ferri, 2006). Benzer olarak 8-10. sınıf öğrencilerinin görsellerle modelleme problemlerinin çözümündeki yaklaşımlarını inceleyen Blum’un (2011) da elde edilen çözümlerin gerçek yaşamda anlamlı olup olmadığına dikkat edilmediğini ifade ettiği görülmektedir. Bu çerçevede ileriki araştırmalarda görsellerle desteklenen yeni öğretim yöntemlerinin oluşturulması ve uygulanması önerilebilir. Matematik öğretim sürecinde somutlaştırılan bilgilerin daha kalıcı öğrenmeler gerçekleştirdiği düşünüldüğünde görsellerle zenginleştirilmiş öğretim ortamlarının geliştirilmesine yönelik lisans dersleri öğretim programına eklenebilir. Ayrıca hâlihazırda çalışmakta olan matematik öğretmenlerine bu konuyla ilgili hizmet içi eğitim seminerleri verilmesi düşünülmelidir.

**Appendix 1.**

*Learning / Teaching Process in the Experimental Group.*

The steps related to the learning process carried out in the experimental group are given below. In this teaching process, each step was applied to the students individually by asking the questions one by one using the question-answer technique, and only small tips were given to the students where necessary. Thus, the students tried to reach a generalization with their own efforts. In addition, the learning process was supported with additional examples when needed and attempts were made to reinforce students' learnings in this way.

**Lecture 1-2**

**Time of application:** 2x40 min

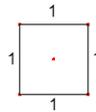
**Practitioner:** 1. Researcher

**Materials:** Whiteboard, colored pencils, A4 papers

**Objective:** To make students comprehend the second power of  $ax+b$  through the geometric representations.

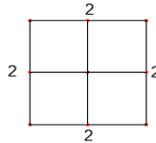
**Second power of  $ax+b$**

When expressing the second power of a number with geometric shapes, the square area is preferred. Indeed, a square area is expressed as  $1.1=1^2$  while calculating the area of a square with a side of 1 unit (see Figure 2a).



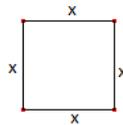
**Figure 2a.** The area of a square with a side of 1 unit.

Similarly the square area is expressed as  $2.2=2^2$  while calculating the area of a square with a side of 2 units (see Figure 2b).



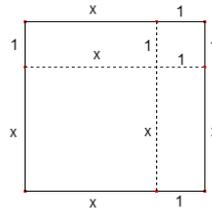
**Figure 2b.** The area of a square with a side of 2 units.

Upon making a generalization from the calculations of the square areas of the squares with a side of 1 unit or 2 units as shown above, the square area can be expressed as  $x.x=x^2$  while calculating the area of square with a side of  $x$  units (see Figure 2c).



**Figure 2c.** The area of a square with a side of  $x$  units.

Using the same logic, the square area can be expressed algebraically as  $(x+1).(x+1)=(x+1)^2$  while calculating the area of a square with a side of  $(x+1)$  units (see Figure 2d).



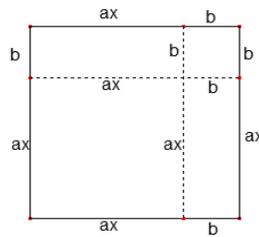
**Figure 2.d.** The area of a square with a side of  $x+1$  units.

The square shown in the figure 2.d, which is considered as a square with a side of  $(x+1)$  units, can be also considered as the sum of the areas of four different rectangular regions. These rectangular regions include two square regions with the areas of  $x^2$  and  $1^2$ , and also two rectangular regions with the areas of  $1 \cdot x$  and  $1 \cdot x$ . From this point it is possible to reach the following identity;

$$(x+1) \cdot (x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 1 \cdot x + 1 \cdot x + 1^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \text{Identity (1.1)}$$

The coefficients for each term of this identity expansion are 1, 2 and 1, respectively. These coefficients correspond to the second row in Pascal triangle.

By using the expansions explained until now, the area of a square with a side of  $(ax+b)$  units can be expressed algebraically as follows;  $(ax+b) \cdot (ax+b) = (ax+b)^2$ . The geometrical representation of this expression is shown in the Figure 2.e.



**Figure 2.e.** The area of a square with a side of  $ax+b$  units.

In line with the information from the previous identity expansions, the square shown in the figure 2.e, which is considered as a square with a side of  $(ax+b)$  units, can be also considered as the sum of the areas of four different rectangular regions. These rectangular regions include two square regions with the areas of  $a^2x^2$  and  $b^2$ , and also two rectangular regions with the areas of  $ax \cdot b$  and  $ax \cdot b$ . So, it is possible to reach the following identity;

$$(ax+b) \cdot (ax+b) = (ax+b)^2 = a^2x^2 + 2 \cdot ax \cdot b + b^2 \quad \text{Identity (1.2)}$$

The coefficients for each term of this identity expansion are  $a^2$ ,  $2 \cdot a \cdot b$  and  $b^2$ , respectively. When the general terms are ignored, these coefficients are 1, 2 and 1, respectively. These coefficients also correspond to the second row in Pascal triangle.

**Lecture 3-4**

**Time of application:** 2×40 min

**Practitioner:** 1. Researcher

**Materials:** Whiteboard, colored pencils, A4 papers

**Objective:** To make students comprehend the third power of  $ax + b$  through the geometric shapes.

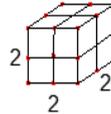
**Third power of  $ax + b$**

The volume of cube is used for expressing the third power of a number with geometric representations. Indeed, the volume of a cube with a side of 1 unit is expressed as follows;  $1.1.1 = 1^3$ . The relevant geometrical representation of this expression is shown in the Figure 3.a



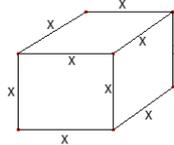
**Figure 3.a.** The volume of a cube with a side of 1 unit.

Similarly, the volume of a cube with a side of 2 units is expressed as follows;  $2.2.2 = 2^3$ , and the relevant geometrical representation of this expression is shown in the Figure 3.b.



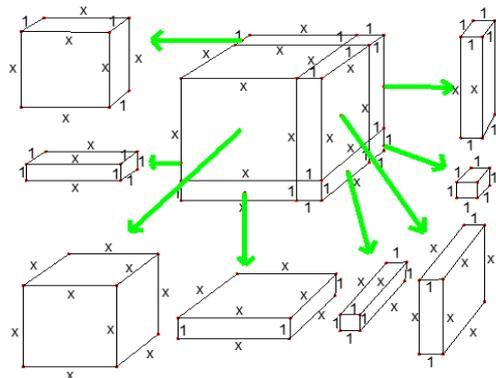
**Figure 3.b.** The volume of a cube with a side of 2 units.

Upon making a generalization from the calculations of the volumes of the cubes with a side of 1 unit and 2 units as shown above, the volume of a cube with a side of  $x$  units can be expressed as follows;  $x.x.x = x^3$ . The relevant geometrical representation of this expression is shown in the Figure 3.c.



**Figure 3.c.** The volume of a cube with a side of  $x$  units.

Using the same logic, the volume of a cube with a side of  $(x+1)$  units can be expressed algebraically as follows;  $(x+1).(x+1).(x+1) = (x+1)^3$ . The relevant geometrical representation of this expression is shown in the Figure 3d.



**Figure 3.d.** The volume of a cube with a side of  $(x + 1)$  units.

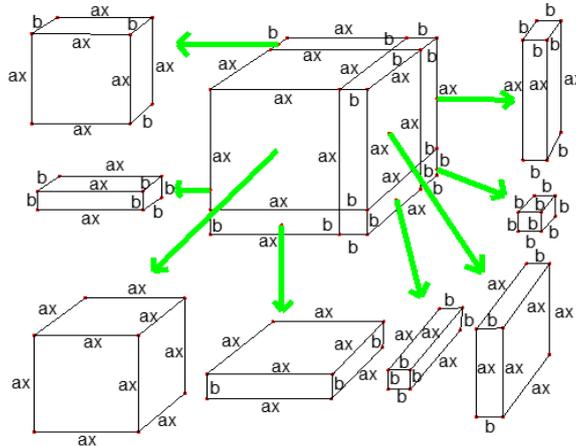
The cube shown in the figure 3.d, which is considered as a cube with a side of  $(x+1)$  units, can be also considered as the sum of the volumes of eight different rectangular solids. Their volumes are as follows;  $x^3, x^2, x^2, x^2, x, x, x, 1^3$ . So, it is possible to reach the following identity;

$$(x+1).(x+1).(x+1) = (x+1)^3 = x^3 + x^2 + x^2 + x^2 + x + x + x + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \text{ Identity (1.3)}$$

The coefficients for each term of this identity expansion are 1, 3, 3 and 1, respectively. These coefficients correspond to the third row in Pascal triangle, similar to the expansion of Identity (1.2). In the light of these data, the volume of a cube with a side of  $(ax+b)$  units can be expressed algebraically as follows;

$$(ax+b).(ax+b).(ax+b) = (ax+b)^3$$

The geometrical representation of this expression is shown in the Figure 3.e.



**Figure 3.e.** The volume of a cube with a side of  $ax+b$  units.

This expression can be thought of as the sum of the volumes of eight different rectangular prisms, while being considered as a cube with a side of  $(ax+b)$  unit. These volumes are  $a^3x^3, a^2bx^2, a^2bx^2, a^2bx^2, ab^2x, ab^2x, ab^2x, b^3$ , respectively. So, it is possible to reach the following identity;

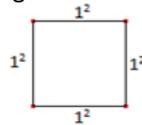
$$(ax+b).(ax+b).(ax+b) = (ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 \text{ Identity (1.4)}$$

The coefficients for each term of this identity expansion are  $a^3, a^2b, ab^2$  and  $b^3$ , respectively. When the general terms are ignored, these coefficients are 1, 3, 3 and 1, respectively. These coefficients also correspond to the third row in Pascal triangle, similar to the Identities of (1.2) and (1.3).

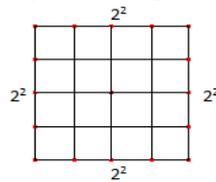
**Lecture 5-6-7****Time of application:** 3×40 min**Practitioner:** 1. Researcher**Materials:** Whiteboard, colored pencils, A4 papers**Objective:** To make students comprehend the fourth power of  $ax+b$  through using geometric representations.**Fourth power of  $ax+b$** 

Square areas and cubic volumes are used to model the third and fourth powers of a number using geometric shapes, respectively. Previously, some researchers worked on such visualizations (Akin & Pesen, 2010, Akin et al. 2010, Dündar, 2012, Özdemir et al. 2013). Two-dimensional geometric models for the second power and three-dimensional geometric objects for the third power were preferred in these studies. However, it is not possible to draw four or more dimensional objects in the visualization dimension for the fourth and higher powers of a number/expression/identity. Therefore, this study has tried to model these powers in the following description by reducing the upper powers to the lower powers.

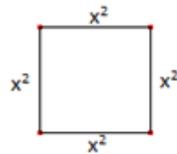
It is possible to transform fourth power of a number into the square of its second power as in the form of  $x^4 = (x^2)^2 = x^2 \cdot x^2$  expression. In other words, the fourth power of a number can be thought of as the area of a square whose one side is the square of the same number. By using this method, it is possible to consider  $1^4 = (1^2)^2 = 1^2 \cdot 1^2$  expression as the area of a square with a side of  $1^2$  unit. The geometric representation of this expression is given in Figure 4.a.

**Figure 4.a.** The area of a square with a side of  $1^2$  unit.

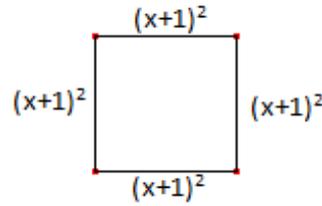
Similarly it is possible to consider  $2^4 = (2^2)^2 = 2^2 \cdot 2^2$  expression as the area of a square with a side of  $2^2$  unit. The geometric representation of this expression is given in Figure 4.b.

**Figure 4.b.** The area of a square with a side of  $2^2$  units.

According to these data,  $x^4 = (x^2)^2 = x^2 \cdot x^2$  can be expressed as the area of a square with a side of  $x^2$  unit. The geometric representation of this expression is given in Figure 4.c.

**Figure 4.c.** The area of a square with a side of  $x^2$  units.

By using the same logic,  $(x+1)^4 = ((x+1)^2)^2 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2$  expression can be considered as the area of a square with a side of  $(x+1)^2$  unit. The geometric representation of this expression is given in Figure 4.d.

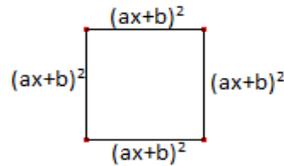


**Figure 4.d.** The area of a square with a side of  $(x+1)^2$  units.

The area of a quadratic solid is expressed as follows;  $(x+1)^4 = ((x+1)^2)^2 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2$ . When the value of Identity (1.1) is replaced and the necessary distributive procedure is applied in this expression, the expansion of Identity (1.5) would be:

$$\begin{aligned} (x+1)^4 &= ((x+1)^2)^2 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) \\ &= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1 \\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \quad \text{Identity (1.5)} \end{aligned}$$

The coefficients for each term of this identity expansion are 1, 4, 6, 4 and 1, respectively. These coefficients correspond to the third row in the Pascal triangle. In the light of these data,  $(ax+b)^4 = ((ax+b)^2)^2 = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2$  expression can be considered as the area of a square with a side of  $(ax+b)^2$  unit. The geometric representation of this expression is given in Figure 4.e.



**Figure 4.e.** The area of a square with a side of  $(ax+b)^2$  units.

With the help of information obtained up to this point, if the Identity (1.2) is written in  $(ax+b)^4 = ((ax+b)^2)^2 = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2$  expression and the necessary mathematical procedures are applied, then the expansion in Identity (1.6) is obtained:

$$\begin{aligned} (ax+b)^4 &= ((ax+b)^2)^2 = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2 = (a^2x^2 + 2axb + b^2) \cdot (a^2x^2 + 2axb + b^2) \\ &= a^4x^4 + 2a^3x^3b + a^2x^2b^2 + 2a^3x^3b + 4a^2x^2b^2 + 2axb^3 + a^2x^2b^2 + 2axb^3 + b^4 \\ &= a^4x^4 + 4a^3x^3b + 6a^2x^2b^2 + 4axb^3 + b^4 \quad \text{Identity (1.6)} \end{aligned}$$

The coefficients for each term of this identity expansion are  $a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3$  and  $b^4$ , respectively. When the general terms are ignored, these coefficients are 1, 4, 6, 4 and 1, respectively. These coefficients also correspond to the third row in Pascal triangle, similar to Identity (1.5).

**Lecture 8-9-10**

**Time of application:** 3×40 min

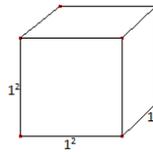
**Practitioner:** 1. Researcher

**Materials:** Whiteboard, colored pencils, A4 papers

**Objective:** To make students comprehend the fifth power of a number through using geometric representations.

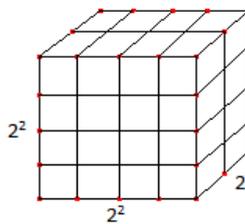
**Fifth power of  $ax+b$**

It has been previously mentioned that the upper powers will be reduced to the lower powers for taking the fourth and higher powers of a number. It is possible to think of a number's fifth power as in the form of  $x^5 = (x^2)^2 \cdot x = x^2 \cdot x^2 \cdot x$ . That is to say, a number's fifth power can be modelled as the square of the area of a square, where one side is the square of the same number. Here, multiplying one number by itself, whose one side is the square of itself, is equivalent to adding a third dimension to this square area. Then, the relevant three-dimensional solid can be considered as right square prism with the sides of  $x^2, x^2$  and  $x$  units. By using this method, firstly the  $1^5 = (1^2)^2 \cdot 1 = 1^2 \cdot 1^2 \cdot 1$  expression can be expressed as a right square prism with the sides of  $1^2, 1^2$  and  $1$  units. The geometric representation of this expression is given in Figure 5.a.



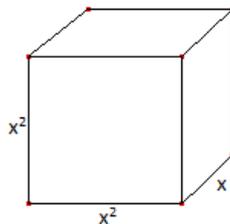
**Figure 5.a.** The volume of a right square prism with the sides of  $1^2, 1^2, 1$  units.

Similarly the  $2^5 = (2^2)^2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2$  expression can be considered as a right square prism with the sides of  $2^2, 2^2$  and  $2$  units. The geometric representation of this expression is given in Figure 5.b.



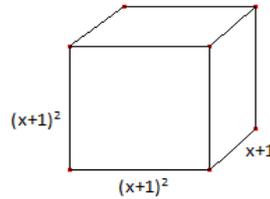
**Figure 5.b.** The volume of a right square prism with the sides of  $2^2, 2^2, 2$  units.

Thus, the  $x^5 = (x^2)^2 \cdot x = x^2 \cdot x^2 \cdot x$  expression can be considered as a right square prism with the sides of  $x^2, x^2$  and  $x$  units. The geometric representation of this expression is given in Figure 5.c.



**Figure 5.c.** The volume of a right square prism with the sides of  $x^2, x^2, x$  units.

By using same logic, the  $(x+1)^5 = ((x+1)^2)^2 \cdot (x+1) = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1)$  expression can be considered as a right square prism with the sides of  $(x+1)^2, (x+1)^2$  and  $(x+1)$  units. The geometric representation of this expression is given in Figure 5.d.

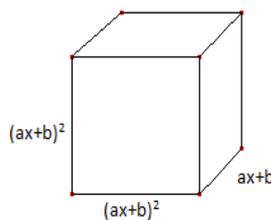


**Figure 5.d.** The volume of a right square prism with the sides of  $(x+1)^2, (x+1)^2, x+1$  units.

The volume of this quadratic solid can be expressed as follows;  $(x+1)^5 = ((x+1)^2)^2 \cdot (x+1) = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1)$ . When the value of Identity (1.1) is replaced and the necessary distributive procedure is applied in this expression, the expansion of Identity (1.7) is obtained as follows:

$$\begin{aligned} (x+1)^5 &= ((x+1)^2)^2 \cdot (x+1) = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) \cdot (x+1) \\ &= (x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1)(x+1) \\ &= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)(x+1) = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \quad \text{Identity (1.7)} \end{aligned}$$

The coefficients for each term of this identity expansion are 1, 5, 10, 10, 5 and 1, respectively. These coefficients correspond to the fourth row in the Pascal triangle. With the help of information obtained up to this point, the  $(ax+b)^5 = ((ax+b)^2)^2 (ax+b) = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2 (ax+b)$  identity can be considered as a right square prism with the sides of  $(ax+b)^2, (ax+b)^2$  and  $(ax+b)$  units. The geometric representation of this expression is given in Figure 5.e.



**Figure 5.e.** The volume of a right square prism with the sides of  $(ax+b)^2, (ax+b)^2, ax+b$  units.

By using the same logic above, when the Identity (1.2) is written in the form of  $(ax+b)^5 = ((ax+b)^2)^2 (ax+b) = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2 (ax+b)$ , the Identity (1.8) is obtained as follows;

$$\begin{aligned} (ax+b)^5 &= ((ax+b)^2)^2 (ax+b) = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2 (ax+b) \\ &= (a^2x^2 + 2axb + b^2) \cdot (a^2x^2 + 2axb + b^2)(ax+b) \\ &= (a^4x^4 + 2a^3x^3b + a^2x^2b^2 + 2a^3x^3b + 4a^2x^2b^2 + 2axb^3 + a^2x^2b^2 + 2axb^3 + b^4)(ax+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a^4x^4 + 4a^3x^3b + 6a^2x^2b^2 + 4axb^3 + b^4)(ax + b) \\
 &= a^5x^5 + 4a^4x^4b + 6a^3x^3b^2 + 4a^2x^2b^3 + axb^4 + a^4x^4b + 4a^3x^3b^2 + 6a^2x^2b^3 + 4axb^4 + b^5 \\
 &= a^5x^5 + 5a^4x^4b + 10a^3x^3b^2 + 10a^2x^2b^3 + 5axb^4 + b^5 \text{ Identity (1.8)}
 \end{aligned}$$

The coefficients for each term of this identity expansion are  $a^5, a^4b, a^2b^3, ab^4$  and  $b^5$ , respectively. When the general terms are ignored, these coefficients are 1, 5, 10, 10, 5 and 1, respectively. These coefficients also correspond to the fourth row in Pascal triangle, similar to Identity (1.7).

### Lecture 11-12

**Time of application:** 2×40 min

**Practitioner:** 1. Researcher

**Materials:** Whiteboard, colored pencils, A4 papers

**Objective:** To make students comprehend the  $n^{\text{th}}$  power of  $ax + b$  through using geometric representations and gain ability to make generalization for all its powers.

#### **$n^{\text{th}}$ power of $ax+b$**

In line with the mathematical procedures, the concepts of quadratic area and square prism volume, which are repeated with respect to even and odd powers, are used in the process of modeling algebraic expressions of  $ax+b$  with the help of geometric shapes. So, it is possible to make a visualization generalization for these algebraic expressions.

If  $n$  is even in  $(ax+b)^n$  identity: it is modelled as the area of a square with a side of  $(ax+b)^{n/2}$  unit.

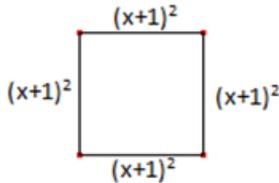
If  $n$  is odd in  $(ax+b)^n$  identity: it is modelled as the volume of right square prism with the sides of  $(ax+b)^{(n-1)/2}$ ,  $(ax+b)^{(n-1)/2}$  ve  $(ax+b)$  units.

**Appendix 2.**

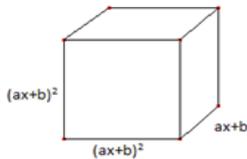
*Identities and Binomial Expansion Achievement Test (IBEAT).*

1. Explain the algebraic structure of  $x^2 + 2x + 1$  expression as a whole square.
2. Make and explain the expansion of  $(x + 3)^2$  expression using geometric shapes.
3. Make and explain the expansion of  $(x + 2)^3$  expression using geometric shapes.
4. Explain the algebraic structure of  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  expression as whole cube.

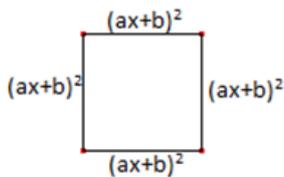
5. Which algebraic expression's visual representation does the visual on the side represent? Solve this algebraic expression by making its expansion.



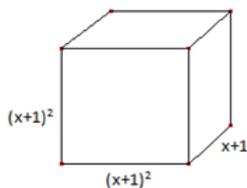
6. Which algebraic expression's visual representation does the visual on the side represent? Solve this algebraic expression by making its expansion.



7. When the expansion of an algebraic expression related to the visual on the side is made, which step in the Pascal triangle coincides with the resultant coefficients? Explain by solving it



8. When the expansion of an algebraic expression related to the visual on the side is made, which step in the Pascal triangle coincides with the resultant coefficients? Explain by solving it



9. Write an identity of  $(ax + b)^5$  corresponding to the fifth row in the Pascal triangle
10. Obtain and write a general rule for the visual representation of the identity of  $(ax + b)^n$

**Appendix 3.**

*Student Opinion Form (SOF).*

1. What do you think about the contribution(s) of this course, which was instructed by using geometric shapes, to your success level?
2. Which direction did you most like in the process of teaching the identities with the help of geometric shapes? Why?
3. Do you think the method used in this course is important? If so, why?
4. At what point did you feel most challenged? Why?
5. What did you feel when you saw that the algebraic structures were expressed in geometric shapes?
6. What kind of skills did you gain as a result of teaching process using the demonstration of algebraic expressions with geometric shapes?
7. In which other areas of algebra or mathematics did you want to use geometric figures? Why?
8. Do you think that the method you used in this course relates the course content to your daily life?

**Ek 1.**

*Deney Grubundaki Öğrenim/Öğretim Süreci*

Deney grubunda yapılmış olan öğrenim süreciyle ilgili adımlar aşağıda sırasıyla verilmiştir. Bu öğrenim sürecinde her bir adım öğrencilere teker teker soru cevap tekniğiyle sorularak buldurulmaya çalışılmış gerekli görülen yerlerde öğrencilere sadece küçük ipuçları verilmiştir. Böylece öğrencilerin kendi çabaları neticesinde genellemeye ulaşmaları sağlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca gerek duyulan noktalarda ek örneklerle öğrenim süreci desteklenerek öğrenmeler pekiştirilmeye çalışılmıştır.

**Ders 1-2**

**Uygulama süresi:** 2×40 dk.

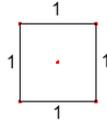
**Uygulayıcı:** 1. Yazar

**Kullanılan Materyaller:** Beyaz tahta, renkli kalemler, A4 kâğıtları

**Amaç:**  $ax+b$  ifadesinin ikinci kuvvetinin geometrik şekillerle kavratmak.

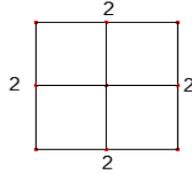
**$ax+b$  ifadesinin İkinci Kuvveti**

Bir sayının ikinci kuvvetini geometrik şekillerle ifade ederken karenin alanı tercih edilir. Nitekim bir kenarı 1 birim olan karenin alanı hesaplanırken  $1 \cdot 1 = 1^2$  şeklinde ifade edilir (bkz. Şekil 2a).



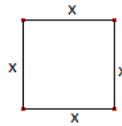
**Şekil 2a.** Bir kenarı 1 birim olan karenin alanı.

Benzer şekilde bir kenarı 2 birim olan karenin alanı hesaplanırken  $2 \cdot 2 = 2^2$  ifadesini kullanılır (bkz. Şekil 2b).



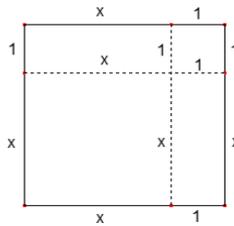
**Şekil 2b.** Bir kenarı 2 birim olan karenin alanı.

Bir kenarı 1 birim olan kare ile bir kenarı 2 birim olan karenin alan hesabı ve geometrik gösteriminden yola çıkarak genelleme yapılırsa, bir kenarı  $x$  birim olan karenin alanı  $x \cdot x = x^2$  cebirsel ifadesiyle belirtilebilir. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 2.c'deki gibidir.



**Şekil 2c.** Bir kenarı  $x$  birim olan karenin alanı.

Aynı mantıkla bir kenarı  $(x+1)$  birim olan karenin alanı  $(x+1) \cdot (x+1) = (x+1)^2$  cebirsel ifadesiyle ifade edilebilir. Bu ifadenin de geometrik gösterimi Şekil 2.d'de gösterilmiştir.



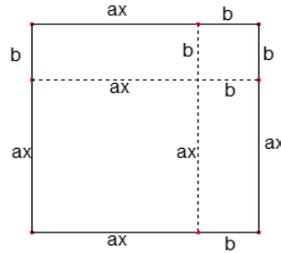
**Şekil 2.d.** Bir kenarı  $x+1$  birim olan karenin alanı.

Şekil 2.d'deki kare, bir kenarı  $(x+1)$  birim olan kare olarak düşünülmeyle beraber, dört farklı dikdörtgensel bölgenin alanının toplamı olarak da düşünülebilir. Bu dikdörtgensel bölgelerin alanları sırasıyla  $x^2$  ve  $1^2$  olan iki karesel alan ile  $1.x$  ve  $1.x$  olan iki dikdörtgensel alandan oluşmaktadır. Bu noktadan hareketle;

$$(x+1).(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 1.x + 1.x + 1^2 = x^2 + 2x + 1 \quad \text{Özdeşlik (1.1)}$$

özdeşliğine ulaşmak mümkündür. Bu özdeşlik açılımının her bir terimine ait katsayılar sırasıyla 1, 2 ve 1 şeklindedir. Bu katsayıların Pascal üçgeninde ikinci satıra denk geldiği görülmektedir.

Bu noktaya kadar yapılan açılımlar yardımıyla genel olarak bir kenarı  $(ax+b)$  birim olan karenin alanını  $(ax+b).(ax+b) = (ax+b)^2$  cebirsel ifadesiyle tanımlamak mümkün olur. Bu ifadenin de geometrik gösterimi Şekil 2.e' de gösterilmiştir.



Şekil 2.e. Bir kenarı  $ax+b$  olan karenin alanı.

Önceki özdeşlik açılımlarındaki bilgiler doğrultusunda, Şekil 2.e'deki kare, bir kenarı  $(ax+b)$  birim olan kare olarak düşünülmeyle beraber, dört farklı dikdörtgensel bölgenin alanının toplamı olarak da düşünülebilir. Bu dikdörtgensel alanlar sırasıyla  $a^2x^2$  ve  $b^2$  olan iki karesel alan ile  $ax.b$  ve  $ax.b$  olan iki dikdörtgensel alandır. Bu noktadan hareketle;

$$(ax+b).(ax+b) = (ax+b)^2 = a^2x^2 + 2.ax.b + b^2 \quad \text{Özdeşlik (1.2)}$$

özdeşliği yazılabilir. Bu özdeşlik açılımındaki her bir terimin katsayıları sırasıyla  $a^2$ ,  $ab$  ve  $b^2$  genel terimleri göz ardı edildiğinde 1, 2 ve 1 şeklindedir. Bu katsayılar da yine Pascal üçgeninde ikinci satıra denk gelmektedir.

### Ders 3-4

**Uygulama süresi:** 2x40 dk.

**Uygulayıcı:** 1. Yazar

**Kullanılan Materyaller:** Beyaz tahta, renkli kalemler, A4 kâğıtları

**Amaç:**  $ax+b$  ifadesinin üçüncü kuvvetinin geometrik şekillerle kavratmak.

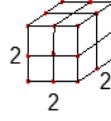
**$ax+b$  İfadesinin Üçüncü Kuvveti**

Bir sayının üçüncü kuvvetini geometrik şekillerle ifade ederken küpün hacmi kullanılır. Bir kenarı 1 birim olan küpün hacmi  $1.1.1=1^3$  şeklinde hesaplanır. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 3.a'da verilmiştir.



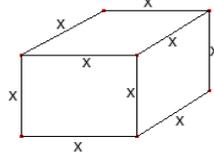
Şekil 3.a. Bir kenarı 1 birim olan küpün hacmi.

Benzer şekilde bir kenarı 2 birim olan küpün hacmi  $2.2.2=2^3$  şeklinde hesaplanır. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 3.b'de gösterildiği gibidir.



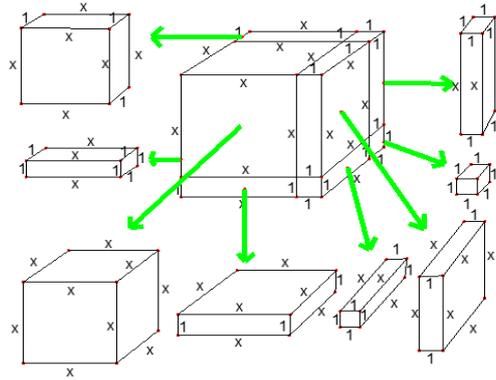
Şekil 3.b. Bir kenarı 2 birim olan küpün hacmi.

Bir kenarı 1 birim olan küp ile bir kenarı 2 birim olan küpün hacim hesabı ve geometrik gösteriminden yola çıkarak genelleme yapılırsa, bir kenarı  $x$  birim olan küpün hacmi  $x \cdot x \cdot x = x^3$  cebirsel ifadeyle belirtilebilir. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 3.c'de olduğu gibidir.



Şekil 3.c. Bir kenarı  $x$  birim olan küpün hacmi.

Aynı mantıkla bir kenarı  $(x+1)$  birim olan küpün hacmi  $(x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) = (x+1)^3$  cebirsel ifadeyle tanımlanır. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 3.d'deki gibidir.



Şekil 3.d. Bir kenarı  $(x+1)$  birim olan küpün hacmi.

Bu ifade bir kenarı  $(x+1)$  birim olan küp olarak düşünülmeyle beraber sekiz farklı dikdörtgenel cismin hacimlerinin toplamı olarak da düşünülebilir. Bu hacimler sırasıyla  $x^3, x^2, x^2, x^2, x, x, x, 1^3$  şeklindedir.

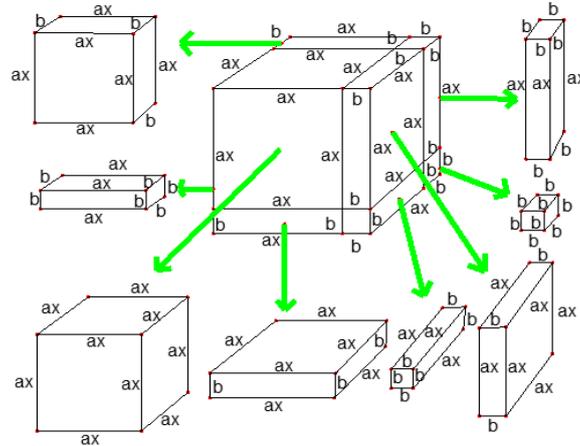
Bu noktadan hareketle;

$$(x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1) = (x+1)^3 = x^3 + x^2 + x^2 + x^2 + x + x + x + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad \text{Özdeşlik(1.3)}$$

özdeşliğine ulaşmak mümkün olur. Bu özdeşlik açılımının her bir terimine ait katsayılar sırasıyla 1, 3, 3 ve 1'dir. Bu açılımın katsayılarının Özdeşlik (1.2)'nin açılımında olduğu gibi Pascal üçgeninin üçüncü satırına denk geldiği görülmektedir. Bu veriler ışığında genel olarak bir kenarı  $(ax+b)$  birim olan küpün hacmini şu şekilde tanımlanabilir;

$$(ax+b) \cdot (ax+b) \cdot (ax+b) = (ax+b)^3$$

Bu ifadenin geometrik gösterimi ise Şekil 3.e'de gösterilmiştir.



Şekil 3.e. Bir kenarı ax+b birim olan küpün hacmi.

Bu ifade bir kenarı  $(ax+b)$  birim olan küp olarak düşünülmeyle beraber sekiz farklı dikdörtgen prizmasının hacimlerinin toplamı olarak ta düşünülebilir. Bu hacimler sırasıyla  $a^3x^3$ ,  $a^2bx^2$ ,  $a^2bx^2$ ,  $a^2bx^2$ ,  $ab^2x$ ,  $ab^2x$ ,  $ab^2x$ ,  $b^3$  şeklindedir. Bu noktadan hareketle;

$$(ax+b) \cdot (ax+b) \cdot (ax+b) = (ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 \quad \text{Özdeşlik (1.4)}$$

özdeşliğine ulaşmak mümkün olur. Bu özdeşlik açılımının her bir terimine ait katsayılar  $a^3$ ,  $a^2b$ ,  $ab^2$  ve  $b^3$  genel terimleri göz ardı edildiğinde sırasıyla 1, 3, 3 ve 1 şeklindedir. Bu katsayıların Özdeşlik (1.2) ve Özdeşlik (1.3)'de olduğu gibi Pascal üçgeninde üçüncü satıra denk geldiği görülmektedir.

### Ders 5-6-7

**Uygulama süresi:** 3×40 dk.

**Uygulayıcı:** 1. Yazar

**Kullanılan Materyaller:** Beyaz tahta, renkli kalemler, A4 kâğıtları

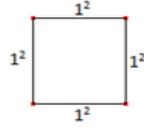
**Amaç:**  $ax+b$  ifadesinin dördüncü kuvvetinin geometrik şekillerle kavratmak.

#### $ax+b$ İfadesinin Dördüncü Kuvveti

Bir sayının ikinci kuvvetini geometrik şekillerle modellerken karesel alanlar, üçüncü kuvvetini modellerken küp hacimleri kullanılır. Daha önce bazı araştırmacılar bu tür görselleştirmelerle ilgili çalışmalar yapmışlardır (Akın & Pesen, 2010, Akın et al. 2010, Dündar, 2012, Özdemir et al. 2013). Bu çalışmalarda ikinci kuvvet için iki boyutlu geometrik modeller, üçüncü kuvvet için üç boyutlu geometrik cisimler tercih edilmiştir. Ancak dördüncü ve daha yüksek kuvvetler için görselleştirme boyutunda dört veya daha fazla boyutlu cisimler çizmek mümkün değildir. Bu noktadan hareketle bu kuvvetlerin anlatımında bundan sonraki süreçte üst kuvvetler alt kuvvetlere indirgenerek modellenmeye çalışılacaktır.

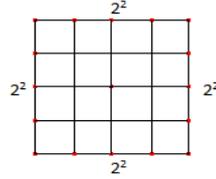
Bir sayının dördüncü kuvveti ikinci kuvvetinin karesi olarak  $x^4 = (x^2)^2 = x^2 \cdot x^2$  şeklinde düşünmek mümkündür. Yani bir sayının dördüncü kuvveti, bir kenarı aynı sayının karesi olan karesel alan olarak düşünülebilir.

Bu yöntemle öncelikle  $1^4 = (1^2)^2 = 1^2 \cdot 1^2$  ifadesini, bir kenarı  $1^2$  birim olan kare ile ifade etmek mümkündür. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 4.a'da verilmiştir.



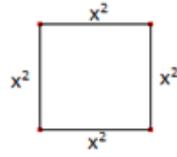
**Şekil 4.a.** Bir kenarı  $1^2$  birim olan karenin alanı.

Aynı şekilde  $2^4 = (2^2)^2 = 2^2 \cdot 2^2$  ifadesi, bir kenarı  $2^2$  birim olan kare gibi düşünülebilir. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 4.b'de verilmiştir.



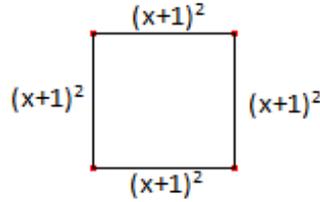
**Şekil 4.b.** Bir kenarı  $2^2$  birim olan karenin alanı.

Bu verilere göre  $x^4 = (x^2)^2 = x^2 \cdot x^2$  ifadesi, bir kenarı  $x^2$  birim olan kare gibi düşünülebilir. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 4.c'de olduğu gibidir.



**Şekil 4.c.** Bir kenarı  $x^2$  birim olan karenin alanı.

Aynı mantıkla  $(x+1)^4 = ((x+1)^2)^2 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2$  ifadesi, bir kenarı  $(x+1)^2$  birim olan kare gibi düşünülebilir. Bu ifadenin geometrik gösterimi Şekil 4.d'de olduğu gibidir.



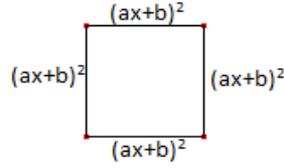
**Şekil 4.d.** Bir kenarı  $(x+1)^2$  birim olan karenin alanı.

Bu karesel cismin alanı  $(x+1)^4 = ((x+1)^2)^2 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2$  şeklinde ifade edilir. Bu ifadede Özdeşlik

(1.1) değerini yerine yazıp gerekli dağılma işlemleri yapıldığında Özdeşlik (1.5)'deki açılım elde edilir.

$$\begin{aligned} (x+1)^4 &= ((x+1)^2)^2 = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) \\ &= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1 \\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \end{aligned} \quad \text{Özdeşlik (1.5)}$$

Bu özdeşlik açılımındaki her bir terime ait katsayılar sırasıyla 1, 4, 6, 4 ve 1 şeklindedir. Bu katsayılar Pascal üçgeninde üçüncü satıra denk gelmektedir. Bu bilgilerden hareketle genel olarak  $(ax+b)^4 = ((ax+b)^2)^2 = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2$  ifadesini bir kenarı  $(ax+b)^2$  birim olan kare gibi düşünülebilir. Bu ifadenin geometrik modellenmesi Şekil 4.e'de olduğu gibidir.



**Şekil 4.e.** Bir kenarı  $(ax+b)^2$  birim olan karenin alanı.

Bu noktaya kadar elde edilen bilgiler yardımıyla  $(ax+b)^4 = ((ax+b)^2)^2 = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2$  ifadesinde

Özdeşlik (1.2) yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa Özdeşlik (1.6)'daki açılım elde edilir.

$$\begin{aligned} (ax+b)^4 &= ((ax+b)^2)^2 = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2 = (a^2x^2 + 2axb + b^2) \cdot (a^2x^2 + 2axb + b^2) \\ &= a^4x^4 + 2a^3x^3b + a^2x^2b^2 + 2a^3x^3b + 4a^2x^2b^2 + 2axb^3 + a^2x^2b^2 + 2axb^3 + b^4 \\ &= a^4x^4 + 4a^3x^3b + 6a^2x^2b^2 + 4axb^3 + b^4 \end{aligned}$$

Özdeşlik (1.6)

Bu özdeşlik açılımındaki terimlere ait katsayılar sırasıyla  $a^4$ ,  $a^3b$ ,  $a^2b^2$ ,  $ab^3$  ve  $b^4$  genel terimleri göz ardı edildiğinde 1, 4, 6, 4 ve 1 şeklindedir. Bu katsayıların, Özdeşlik (1.5) deki açılımda olduğu gibi, Pascal üçgeninde üçüncü satıra denk geldiği görülmektedir.

#### Ders 8-9-10

**Uygulama süresi:** 3×40 dk.

**Uygulayıcı:** 1. Yazar

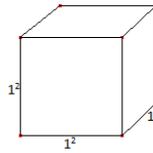
**Kullanılan Materyaller:** Beyaz tahta, renkli kalemler, A4 kâğıtları

**Amaç:**  $ax+b$  ifadesinin beşinci kuvvetinin geometrik şekillerle kavratmak.

**$ax+b$  İfadesinin Beşinci Kuvveti**

Dördüncü ve daha yüksek kuvvetler için üst kuvvetlerin alt kuvvetlere indirgenerek modelleneceği daha önce belirtilmiştir. Bir sayının beşinci kuvvetini  $x^5 = (x^2)^2 \cdot x = x^2 \cdot x^2 \cdot x$  şeklinde düşünmek mümkündür.

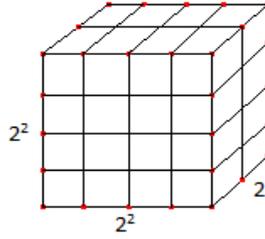
Yani bir sayının beşinci kuvveti, bir kenarı aynı sayının karesi olan karesel alanın kendisi ile çarpımı olarak modellenebilir. Burada bir kenarı kendisinin karesi olan sayıyı tekrar kendisi ile çarpmak bu karesel alana üçüncü bir boyut katmak ile eşdeğer düşünülebilir. O zaman çizilecek üç boyutlu cismin ayrıtları sırasıyla  $x^2$ ,  $x^2$  ve  $x$  birim olan kare dik prizma gibi düşünülebilir. Bu yöntemle öncelikle  $1^5 = (1^2)^2 \cdot 1 = 1^2 \cdot 1^2 \cdot 1$  ifadesini kenarları  $1^2$ ,  $1^2$  ve 1 birim olan kare prizma gibi ifade edilebilir. Bu ifadenin geometrik modellenmesi Şekil 5.a'da gösterilmiştir.



**Şekil 5.a.** Ayrıtları  $1^2$ ,  $1^2$ , 1 birim olan kare prizmanın hacmi.

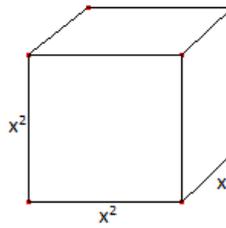
Aynı şekilde  $2^5 = (2^2)^2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2$  ifadesi kenarları  $2^2$ ,  $2^2$  ve 2 birim olan kare prizma gibi düşünülebilir.

Bu ifadenin geometrik modellenmesi Şekil 5.b'de verilmiştir.



Şekil 5.b. Ayrıtları  $2^2$ ,  $2^2$ , 2 birim olan kare prizmanın hacmi.

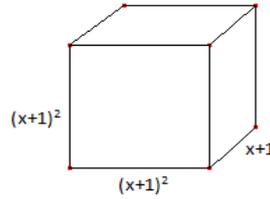
Böylece  $x^5 = (x^2)^2 = x^2 \cdot x^2 \cdot x$  ifadesi kenarları  $x^2$ ,  $x^2$  ve  $x$  birim olan kare prizma gibi düşünülebilir. Bu ifadenin geometrik modellenmesi Şekil 5.c'de gösterilmiştir.



Şekil 5.c. Ayrıtları  $x^2$ ,  $x^2$ ,  $x$  birim olan kare prizmanın hacmi.

Aynı mantıkla  $(x+1)^5 = ((x+1)^2)^2 \cdot (x+1) = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1)$  ifadesi kenarları

$(x+1)^2$ ,  $(x+1)^2$  ve  $(x+1)$  olan kare prizma gibi düşünülebilir. Bu ifadenin geometrik modellenmesi Şekil 5.d'de görüldüğü gibidir.



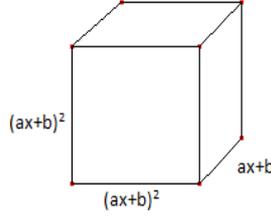
Şekil 5.d. Ayrıtları  $(x+1)^2$ ,  $(x+1)^2$ ,  $x+1$  birim olan kare prizmanın hacmi.

Bu karesel cismin hacmi  $(x+1)^5 = ((x+1)^2)^2 \cdot (x+1) = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1)$  şeklinde ifade edilir. Bu ifadede Özdeşlik (1.1) değerini yerine yazıp gerekli işlemler yapıldığında Özdeşlik (1.7)'deki açılım elde edilir.

$$\begin{aligned}
 (x+1)^5 &= ((x+1)^2)^2 \cdot (x+1) = (x+1)^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x + 1) \cdot (x+1) \\
 &= (x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1)(x+1) \\
 &= (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)(x+1) = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 4x^2 + x + x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\
 &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \quad \text{Özdeşlik (1.7)}
 \end{aligned}$$

Bu özdeşlik açılımının her bir terimine ait katsayılar sırasıyla 1, 5, 10, 10, 5 ve 1 şeklindedir. Bu katsayılar Pascal üçgeninde dördüncü satıra denk gelmektedir. Bu noktaya kadar elde edilen bilgiler yardımıyla

$(ax+b)^5 = ((ax+b)^2)^2 (ax+b) = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2 (ax+b)$  ifadesi ayrıtları  $(ax+b)^2$ ,  $(ax+b)^2$  ve  $(ax+b)$  birim olan kare dik prizma gibi düşünülebilir. Bu ifadenin geometrik modellenmesi Şekil 5.e’de gösterilmiştir.



**Şekil 5.e.** Ayrıtları  $(ax+b)^2$ ,  $(ax+b)^2$ ,  $ax+b$  birim olan kare prizmanın hacmi.

Yukarıdaki mantıktan hareketle  $(ax+b)^5 = ((ax+b)^2)^2 (ax+b) = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2 (ax+b)$  ifadesinde Özdeşlik (1,2) yerine yazılırsa Özdeşlik (1.8) elde edilir.

$$\begin{aligned} (ax+b)^5 &= ((ax+b)^2)^2 (ax+b) = (ax+b)^2 \cdot (ax+b)^2 (ax+b) \\ &= (a^2x^2 + 2axb + b^2) \cdot (a^2x^2 + 2axb + b^2)(ax+b) \\ &= (a^4x^4 + 2a^3x^3b + a^2x^2b^2 + 2a^3x^3b + 4a^2x^2b^2 + 2axb^3 + a^2x^2b^2 + 2axb^3 + b^4)(ax+b) \\ &= (a^4x^4 + 4a^3x^3b + 6a^2x^2b^2 + 4axb^3 + b^4)(ax+b) \\ &= a^5x^5 + 4a^4x^4b + 6a^3x^3b^2 + 4a^2x^2b^3 + axb^4 + a^4x^4b + 4a^3x^3b^2 + 6a^2x^2b^3 + 4axb^4 + b^5 \\ &= a^5x^5 + 5a^4x^4b + 10a^3x^3b^2 + 10a^2x^2b^3 + 5axb^4 + b^5 \end{aligned}$$

Bu özdeşlikteki her bir terime ait katsayılar sırasıyla  $a^5$ ,  $a^4b$ ,  $a^3b^2$ ,  $a^2b^3$ ,  $ab^4$  ve  $b^5$  genel terimleri göz ardı edildiğinde 1, 5, 10, 10, 5 ve 1 şeklindedir. Bu katsayılar Özdeşlik (1.7) deki açılımda olduğu gibi, Pascal üçgeninde dördüncü satıra denk geldiği görülmektedir.

## Ders 11-12

**Uygulama süresi:** 2×40 dk.

**Uygulayıcı:** 1. Yazar

**Kullanılan Materyaller:** Beyaz tahta, renkli kalemler, A4 kâğıtları

**Amaç:**  $ax+b$  ifadesinin  $n$ 'nci kuvvetinin geometrik şekillerle kavratmak ve tüm kuvvetler için genelleme yapabilme becerisi kazandırmak.

**$ax+b$  İfadesinin  $n$ 'nci Kuvveti**

Yapılan işlemler doğrultusunda  $ax+b$  şeklindeki cebirsel ifadelerin geometrik şekillerle modellenmesi süreci tek ve çift kuvvetlere göre tekrar eden karesel alan ve kare prizma hacmi kavramları olduğu görülmektedir. Bu noktadan hareketle  $ax+b$  şeklindeki cebirsel ifadeler için şöyle bir görselleştirme genellemesi yapmak mümkündür.

$(ax+b)^n$  ifadesinde  $n$  çift ise: bir kenarı  $(ax+b)^{n/2}$  olan karenin alanı olarak modellenir.

$(ax+b)^n$  ifadesinde  $n$  tek ise: ayrıtları  $(ax+b)^{(n-1)/2}$ ,  $(ax+b)^{(n-1)/2}$  ve  $(ax+b)$  olan kare dik prizma olarak modellenir.

### Ek 2.

#### Özdeşlikler ve Binom Açılımı Başarı Testi (ÖBAPT).

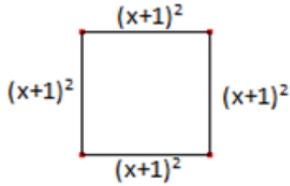
1.  $x^2 + 2x + 1$  cebirsel yapısını tam kare olarak ifade ediniz.

2.  $(x + 3)^2$  ifadesini şekille ifade ederek açılımını yapınız.

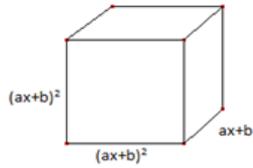
3.  $(x + 2)^3$  ifadesini şekille ifade ederek açılımını yapınız.

4.  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  cebirsel yapısını tam küp olarak ifade ediniz.

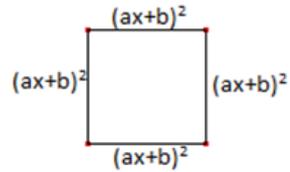
5. Yanda verilen görsel hangi cebirsel ifadenin görsellerle gösterimine örnektir? Bu cebirsel ifadenin açılımını yaparak çözünüz.



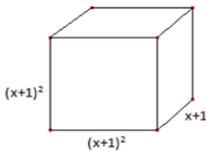
6. Yanda verilen görsel hangi cebirsel ifadenin görsellerle gösterimine örnektir? Bu cebirsel ifadenin açılımını yaparak çözünüz.



7. Yanda verilen görsel ile ilgili cebirsel ifadenin açılımı yapıldığında elde edilen sonucun katsayıları Pascal üçgeninde hangi basamağa denk gelmektedir? Çözerek açıklayınız.



8. Yanda verilen görsel ile ilgili cebirsel ifadenin açılımı yapıldığında elde edilen sonucun katsayıları Pascal üçgeninde hangi basamağa denk gelmektedir? Çözerek açıklayınız.



9. Pascal üçgeninde beşinci satıra denk gelen  $(ax + b)^5$  şeklinde bir özdeşlik yazınız.

10.  $(ax + b)^n$  şeklinde verilen özdeşliğin görsellerle gösteriminde genel bir kural elde ediniz ve bu kuralı yazınız.

### Ek 3.

#### Öğrenci Görüş Formu (ÖGF).

1. Bu dersin geometrik şekiller kullanılarak işlenmesinin başarınız adına faydasının/faydalarının neler olduğunu düşünüyorsunuz?
2. Özdeşliklerin geometrik şekillerle ifade edilerek ders işlenmesi sürecinin en çok hangi yönü hoşunuza gitti. Niçin?
3. Sizce bu ders işlenirken kullanılan yöntem önemli midir gerekçelerini açıklayınız?
4. Dersin işlenmesi sürecinde en çok hangi noktada zorlandınız. Niçin?
5. Cebirsel yapıların geometrik şekillerle ifade edildiğini gördüğünüzde neler hissettiniz?
6. Cebirsel ifadelerin geometrik şekillerle gösterilmesi size ne gibi beceriler kazandırdı?
7. Cebir'in ya da matematiğin başka hangi alanlarında geometrik şekillerle gösterimi kullanmak isterdiniz. Neden?
8. Bu dersin işlenişinde kullanmış olduğunuz yöntemin, ders içeriğini günlük yaşamla ilişkilendirdiğini düşünüyor musunuz?

### References

- Altun, M. (1995). *A study on problem solving behaviors of students in 3rd, 4th and 5th grade in elementary school*. Unpublished doctorate dissertation. Hacettepe University, Ankara, Turkey.
- Akman, B., Yükselen, A. İ. & Uyanık, G. (2000). *Mathematical activities in preschool period*. Istanbul: Epsilon Publishing House.
- Baki, A. (2008). *Mathematical education from the theory to practice (Extended 4th Edition)*. Ankara: Letters Education Publishing.
- Baykul, Y. (1997). *Mathematics teaching in primary education* (2nd edition). Ankara, Turkey: Elit Publishing House.
- Blum, W. (2011). *Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research*. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15-30). Dordrecht, the Netherlands: Springer.
- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM-Mathematics Education*, 38(2), 86-95.
- Büyükoztürk, Ş. (2013). *Data analysis handbook for social sciences*. Ankara: Pegem Academy.
- Çiltaş, A. & Işık, A. (2012). Determination of the mental models of elementary mathematics teacher candidates about series and series. *Erzincan University Education Faculty Journal*, 14 (2), 167-182.
- Çiltaş, A. & Işık, A. (2013). The effect of mathematical modeling on the modeling skills of elementary mathematics teacher candidates. *Theory and Practice in Educational Sciences*, 13 (2), 1177-1194.
- Çiltaş, A. & Yılmaz, A. (2013). Mathematical models that elementary mathematics teacher candidates have established for expressions of the theorems. *Journal of Education and Training Studies*, 2 (2), 107-114.
- Dede, Y., Yalın, H. İ. & Argün, Z. (2002). *The mistakes and misconceptions in the learning of the variable concept of the 8th grade primary school students*. V. National Science and Mathematics Education Congress report book (p. 221). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.
- Dede, Y. & Karakuş, F. (2014). A pedagogical perspective about the concept of mathematical proof: A theoretical study. *Adiyaman University Journal of Educational Sciences*, 4(2), 47-71.
- Durmuş, S. & Karakırık, E. (2006). Virtual manipulatives in mathematics education: A theoretical framework. *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 5 (1), 117-123.
- Duit, R. & Glynn, S. (1996). *Mental modeling*. In G. Welford J. Osborne, & P. Scott (Eds.), *Research in science education in Europe* (pp. 166-176). London, UK: The Falmer Press.
- English, L. D. & Watters, J. J. (2005). Mathematical modeling in third-grade classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, 16 (3), 59-80.
- English, L. D. (2004). *Mathematical modeling in the primary school*. In I. Faragher, R. McLean, & M. Putt (Eds.), *27th annual conference of Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics education for the third millennium: Towards 2010* (Vol.1, pp. 207-214). Sydney, Australia: MERGA.
- Hamersma, P. S. (2002). *In this paper, we propose a computer-based visualization tool to learn the complex numbers in trigonometry*. Unpublished doctorate dissertation, University of South Florida, FL, the USA.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23.
- Hanna, G. & Sidoli, N. (2007). Visualization and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM-Mathematics Education*, 39 (1), 73-78.

- Identity, (2017). [Def. 3]. (n.d.). *The Turkish language association's current Turkish dictionary*. Retrieved May 10, 2017, from [http://tdk.gov.tr/index.php?option=com\\_gts&view=gts](http://tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&view=gts)
- Konyalıoğlu, A. C. (2003). *An examination of the effectiveness of the visualization approach in understanding the concepts of vector spaces at university level*. Unpublished doctorate dissertation, Ataturk University, Erzurum, Turkey.
- Koğ, U. O. & Başer, N. (2011). The effect of visualization on learned helplessness and abstract thinking in mathematics. *Western Anatolia Educational Sciences Journal*, 1 (3), 89-108.
- Liang, H. N. & Sedig, K. (2010). Can interactive visualization tools engage and support pre-university students in exploring non-trivial mathematical concepts? *Computers & Education*, 54 (1), 972-991.
- Ministry of Education. (2009). *Primary Mathematics Lesson 1-5. Classes Curriculum*. Ankara: Board of Education and Training Board.
- Olkun, S., Yıldız, E., Sarı, M. H., Uçar, A. & Turan, N. A. (2014). Computational fluency, multiplication table and performance in solving verbal problems in middle school students. *Elementary Education Online*, 13 (4), 1542-1553.
- Özdemir, M. E., Duru, A. & Akgün, L. (2005). Two and three dimensional thinking: visualization of some identities with two and three dimensional geometric shapes. *Gazi University Kastamonu Education Journal*, 13 (2), 527-540.
- Presmeg, N. C. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. In A. Gutierrez, P., Borero (Eds.), *Handbook of Research on Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 205-235). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Rösken, B. & Rolka, K. (2006). A picture is worth a 1000 words - the role of visualization in Mathematics learning. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 457-464). Prague, Czech Republic: PME.
- Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.
- Stylianou, D. A. & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Journal of Mathematical Thinking and Learning*, 6(4), 353-387.
- Tekin, B. & Konyalıoğlu, A. C. (2010). Visualization of total and difference formulas of trigonometric functions at secondary level. *Bayburt University Journal of Education*, 5 (I-II), 24-37.
- Taşova, H. İ. & Delice, A. (2011). An analysis of pre-service mathematics teachers' performance in modeling tasks in terms of spatial visualization ability. *Research in Mathematics Education*, 14 (3), 297-298.
- Uyganör, S. M. & Övez, F.T.D. (2012). The level of access to achievements in the algebra learning area of the elementary school sixth grade mathematics teaching program. *Necati Bey Education Faculty Electronic Science and Mathematics Education Journal*, 6 (1), 1-22.
- Yıldırım, Z. & Işık, A. (2014). Effect of mathematical modeling activities on the academic achievement of fifth grade students in mathematics. *Kastamonu Education Journal*, 23 (2), 581-600.
- Yenilmez, K. & Şan, İ. (2008). The level of recognition of visual models of identities by ninth-grade students. *E-Journal of New World Sciences Academy*, 3(1), 409-418.

